Examen final de Cálculo Integral
6 de septiembre de 2013 (Soluciones)

Cuestiones

C_1 Aplicando el teorema 1.15 y definición 1.30 de los apuntes se concluye inmediatamente que el valor de la integral coincide con la longitud de C: si tenemos una parametrización $\boldsymbol{c}$ de la curva C que cumpla las hipótesis del teorema 1.15, entonces

$$\int_C \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}\, ds = \int_{\boldsymbol{c}} \|\boldsymbol{T}\|^2\, ds = \int_{\boldsymbol{c}} ds = \ell(C).$$

Gracias a la definición de arco simple, lo que tenemos garantizado es que hay alguna parametrización de C que puede descomponerse en suma de un número finito de caminos que sí que cumplen las hipótesis del teorema 1.15. Y con eso es suficiente para terminar el razonamiento en todos los casos porque, si es necesario, no hay más que descomponer la integral en una suma de integrales.

C_2 Una forma de hacerlo que sirve para cualquier camino es utilizar la definición 1.18 de los apuntes.

C_3 De acuerdo con el teorema 3.11 de los apuntes, los dos vectores normales son colineales y el factor por el que hay que multiplicar uno para obtener el otro es el determinante jacobiano del cambio de variables.

C_4 La solución está contenida en la definición 3.25 de los apuntes.

C_5 Nos piden identificar el conjunto $\partial\Sigma$ y la orientación con que hay que dotarlo para que la fórmula de Stokes sea correcta.

Una cuestión muy similar a ésta se resuelve en el apartado 3.4.2.3.b) de los apuntes (figura 3.28). La única diferencia es que en el caso que allí se desarrolla las orientaciones son todas las opuestas del caso que aquí se plantea.

Problemas

P_1

De acuerdo con el enunciado del problema, es adecuado tomar $u = y-2x$, $v = x+y$. Despejando en estas ecuaciones x, y en función de u, v, obtenemos que $x = \frac{v-u}{3}$, $y = \frac{2v+u}{3}$. Además, $0 \leq u \leq 1$, $\pi \leq v \leq 2\pi$, es decir, $(u, v) \in E = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]$. Por tanto, la aplicación

$$\boldsymbol{T} : E \to D, \quad (u, v) \mapsto \left(\frac{v-u}{3}, \frac{2v+u}{3}\right)$$

satisface las condiciones del Teorema del Cambio de Variable (2.32), siendo $|\det J\boldsymbol{T}| = \frac{1}{3}$. Aplicando dicho teorema,

$$\iint_D (y-2x)^3 \sin(x+y)\, dA = \iint_E \frac{1}{3}\ u^3 \sin v\, du\, dv.$$

Aplicando ahora el Teorem de Fubini (2.12),

$$\iint_E \frac{1}{3}\ u^3 \sin v\, du\, dv = \frac{1}{3}\int_0^1 u^3\, du \int_\pi^{2\pi} \sin v\, dv = \frac{1}{3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 \Big[-\cos v\Big]_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{6}.$$

Concluimos que $\iint_D (y-2x)^3 \sin(x+y)\, dA = -\frac{1}{6}$.

$\mathbf{P_2}$

Primera forma de resolución

Observar que $x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ (corresponde a un cilindro en el plano XY de centro en $(0,1)$). Entonces, una parametrización de Σ es

$$\boldsymbol{\Phi}(\theta, z) = (\cos\theta, 1+\sin\theta, z), \quad (\theta, z) \in D_\Phi = \left\{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le \cos\theta\right\}$$

(el intervalo de variación para θ se deduce de que, como $x \ge 0$, $\cos\theta \ge 0$).

Un vector normal en cada punto de la superficie es

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(\theta, z) = \boldsymbol{\Phi}_\theta(\theta, z) \times \boldsymbol{\Phi}_z(\theta, z) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (0,0,1) = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Elegimos como orientación positiva de Σ la asociada a $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}$, que es la de las normales exteriores.

Entonces, aplicando la Definición 3.21,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{D_\Phi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(\theta, z)) \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(\theta, z)\, d\theta\, dz = \\
&= \iint_{D_\Phi} (1, -\cos\theta, z^2 + \cos\theta(1+\sin\theta)) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, d\theta\, dz = \\
&= \iint_{D_\Phi} (\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\, d\theta\, dz.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando el Teorema 2.20,

$$\iint_{D_\Phi} (\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\, d\theta\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} (\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\, dz\right) d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - \cos^2\theta\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\Big[\theta + \sin\theta\cos\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

(para calcular la integral del primer sumando se puede aplicar la fórmula 15 de la tabla de integrales).

Concluimos que $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\pi}{2}$.

Segunda forma de resolución

Usando coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$), tenemos que:

(I) $x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow r^2 = 2r\sin\vartheta \Leftrightarrow r = 2\sin\vartheta$ (la última equivalencia es cierta ya que de la igualdad $r = 2\sin\vartheta$ se obtiene que $r = 0$ cuando $\vartheta = 0$).

(II) $0 \leq z \leq x \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 2\sin\vartheta\cos\vartheta \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \sin 2\vartheta$.

(III) $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, ya que, por (I), $\sin\vartheta \geq 0$; por (II), $\cos\vartheta \geq 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, una parametrización de Σ es también

$$\boldsymbol{\phi}(\vartheta, z) = (\sin 2\vartheta, 2\sin^2\vartheta, z), \quad (\vartheta, z) \in D_\phi = \left\{(\vartheta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq z \leq \sin 2\vartheta\right\}.$$

Un vector normal en cada punto de la superficie es

$$\boldsymbol{n_\phi}(\vartheta, z) = \boldsymbol{\phi_\vartheta}(\vartheta, z) \times \boldsymbol{\phi_z}(\vartheta, z) = (2\cos 2\vartheta, 2\sin 2\vartheta, 0) \times (0, 0, 1) = (2\sin 2\vartheta, -2\cos 2\vartheta, 0).$$

Dicho vector $\boldsymbol{n_\phi}$ establece como orientación positiva de Σ la de las normales exteriores, como en la primera forma de resolución.

Entonces, aplicando la Definición 3.21,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{D_\phi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\phi}(\vartheta, z)) \cdot \boldsymbol{n_\phi}(\vartheta, z)\, d\vartheta\, dz = \\
&= \iint_{D_\phi} (1, -\sin 2\vartheta, z^2 + 2\sin 2\vartheta \sin^2\vartheta) \cdot (2\sin 2\vartheta, -2\cos 2\vartheta, 0)\, d\vartheta\, dz = \\
&= \iint_{D_\phi} (2\sin 2\vartheta + 2\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta)\, d\vartheta\, dz.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando el Teorema 2.20,

$$\iint_{D_\phi} (2\sin 2\vartheta + 2\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta)\, d\vartheta\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin 2\vartheta} (2\sin 2\vartheta + 2\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta)\, dz\right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2 2\vartheta + 2\sin^2 2\vartheta\cos 2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{2}\Big[2\vartheta - \sin 2\vartheta\cos 2\vartheta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin^3 2\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

(para calcular la integral del primer sumando se puede aplicar la fórmula 14 de la tabla de integrales).

Concluimos nuevamente que $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\pi}{2}$.

$\mathbf{P_3}$

Usando coordenadas esféricas, tenemos (ver Sección 4.4)

$$z = \rho\cos\varphi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \text{el determinate del jacobiano es } \rho^2\sin\varphi.$$

Y por el Teorema del Cambio de Variable (2.32),

$$\iiint_W \frac{z^2}{2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}}\, dV = \iiint_E \frac{\rho^4}{2 + \rho^5} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

donde $E = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 1,\, 0 \le \varphi \le \pi,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Aplicando ahora el Teorema de Fubini para integrales triples (p. 189),

$$\begin{aligned}\iiint_E \frac{\rho^4}{2+\rho^5} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^4}{2+\rho^5}\, d\rho = \\ &= 2\pi \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} \left[\frac{1}{5}\ln(2+\rho^5)\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15} \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Concluimos que $\iiint_W \frac{z^2}{2+\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}\, dV = \frac{4\pi}{15}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

P$_4$

Primera forma de resolución

Aplicando el Teorema de la Divergencia (4.12) y teniendo en cuenta que $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = x$,

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W x\, dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

Calculemos la integral triple que aparece en la fórmula anterior. En primer lugar, observar que

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\, x^2 + y^2 \le z \le 4\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0\}.$$

Entonces, aplicando el Teorema 4.3,

$$\iiint_W x\, dx\, dy\, dz = \iint_D x \left(\int_{x^2+y^2}^{4} dz\right) dx\, dy = \iint_D x(4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Además, D puede describirse en coordenadas polares mediante

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad 0 \le r \le 2, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ (ya que } x \ge 0),$$

siendo r el determinante del jacobiano de este cambio de coordenadas. Por tanto, usando el Teorema del Cambio de Variable (2.32) y el Teorem de Fubini (2.12),

$$\begin{aligned}\iint_D x(4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2(4 - r^2) \cos\theta \, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr = \\ &= \Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[4\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128}{15}.\end{aligned} \tag{2}$$

Concluimos que $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{128}{15}$.

Segunda forma de resolución

Se trata de aplicar nuevamente el Teorema de la Divergencia, calculando ahora la integral triple de (1) usando coordenadas cilíndricas, cuyo jacobiano asociado es r. La región W puede describirse utilizando dichas coordenadas de la siguiente forma:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \quad 0 \le r \le 2, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ (ya que } x \ge 0), \quad r^2 \le z \le 4.$$

Por tanto, usando el Teorema del Cambio de Variable (2.32) y el Teorema 4.3,

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cos\theta \left(\int_{r^2}^4 dz \right) dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2(4-r^2)\cos\theta\,dr\,d\theta,$$

con lo que llegamos a la misma integral que la segunda de (2).

Tercera forma de resolución (planteamiento)

La integral $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ también puede calcularse directamente, pero resulta más laborioso. Vamos a exponer su plantemaniento. El alumno interesado puede realizar el trabajo restante.

En primer lugar, observar que $\partial W^+ = \Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^+$, donde

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ z = x^2 + y^2\}, \quad \Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ z = 4\},$$

donde la orientación positiva de Σ_1 y Σ_2 es la de las normales exteriores. Por tanto,

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Además, Σ_1 y Σ_2 son superficies dadas en formas explícita, con lo que sus vectores normales exteriores en cada punto $(x,y) \in D$ son $\boldsymbol{n_1}(x,y) = (2x, 2y, -1)$ y $\boldsymbol{n_2}(x,y) = (0,0,1)$, respectivamente (ver p. 149).

Ya se tiene todo lo necesario para, aplicando la Definición 3.21, calcular las dos integrales $\iint_{\partial\Sigma_1^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, $\iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ (y con ello $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$). Dicho trabajo, basicamente calculístico, se deja para el alumno.

Observación. En el Problema 4 se pone de manifiesto el interés del Teorema de la Divergencia para el cálculo de ciertas integrales de superficie.