# Examen final de Cálculo Integral
## 17 de junio de 2013 (Soluciones)

**_Cuestiones_**

**$C_1$** Sí. Los detalles de una parametrización con estas características se exponen en el ejemplo 1.21.

**$C_2$**
1. Falso. Por ejemplo, la función que vale 1 siempre que $y \geq x^2$ y 0 siempre que $y < x^2$ (similar a la del ejemplo 2.9) es integrable, puesto que todas sus discontinuidades están contenidas en la gráfica de $y = x^2$ (teorema 2.10).
2. Cierto. Aplicando el teorema 2.10.
3. Falso. Ver la observación 36. Además, la función descrita en la parte 1 es un contra-ejemplo.

**$C_3$** Parametrizamos $\Sigma$ utilizando las coordenadas esféricas del apartado 4.4, pero cambiando la $z$ por la $y$ o por la $x$.

Elijamos, por ejemplo, la primera opción: $x = \sin\varphi\cos\theta$, $z = \sin\varphi\sin\theta$, $y = \cos\varphi$, con $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Para esta parametrización el punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ es imagen de los parámteros $\varphi_0 = \theta_0 = \pi/2$. Y el vector normal es

$$\sin\varphi_0(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0).$$

Observación: No puede resolverse esta cuestión despejando la $z$, puesto que lo que se obtiene no es *una* parametrización que describa *toda* la superficie $\Sigma$.

**$C_4$** Está resuelto en el ejemplo 4.7:

$$\mathrm{Vol}(W) = \int_0^1 \left[ \int_{2y^2}^{2} \left( \int_y^{\min\left\{1, \sqrt{z-y^2}\right\}} dx \right) dz \right] dy\,.$$

**$C_5$** Hacemos coincidir el centro de coordenadas con el centro de las esferas y dividimos el conjunto dado en ocho partes, cortando con los planos coordenados, tal como se explica a continuación de la observación 107.

Observación: También puede aplicarse el teorema ya demostrado a cada una de las dos esferas y restar, pero entonces la validez de la fórmula solamente queda demostrada para el caso de que el campo vectorial sea de clase $\mathcal{C}^1$ *sobre la totalidad de la esfera grande*. En cambio, el argumento anteriormente expuesto valdría, además, cuando el campo vectorial solamente sea de clase $\mathcal{C}^1$ *sobre la diferencia de las esferas*. Ver la nota a pie de página número 72.

$\boxed{\textbf{\textit{Problemas}}}$

**P$_1$**

**Primera forma de resolución.**

Aplicando la Definición 1.13,

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt.$$

En este caso tenemos que, para todo $t \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) &= (e^{\sin t}, 6\cos^2 t, \cos^3 t), \\ \boldsymbol{c}'(t) &= (\cos t, -\sin t, 0), \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t) &= e^{\sin t}\cos t - 6\cos^2 t \sin t. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{\pi} \left(e^{\sin t}\cos t - 6\cos^2 t \sin t\right)\, dt = \left[e^{\sin t} + 6\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = -4.$$

**Segunda forma de resolución.**

Observar que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$, tomando $f(x, y, z) = e^x + y^3 z$. Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Generalizado (Teorema 1.16),

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = f(\boldsymbol{c}(\pi)) - f(\boldsymbol{c}(0)) = f(0, -1, 2) - f(0, 1, 2) = -4,$$

obteniendo el mismo valor que en la primera forma de resolución.

**P$_2$** Vamos a determinar la región simple $E$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{T}(E) = D$. Lo haremos de dos formas distintas.

**Primera forma de determinar la región *E*.**

$D$ es el paralelogramo de vértices $(0, 3)$, $(4, 5)$, $(4, 8)$ y $(0, 6)$. También,

$$\boldsymbol{T}(0, 1) = (0, 3), \quad \boldsymbol{T}(1, 1) = (4, 5), \quad \boldsymbol{T}(1, 2) = (4, 8), \quad \boldsymbol{T}(0, 2) = (0, 6).$$

Entonces, por ser $\boldsymbol{T}$ lineal obtenemos que $D = \boldsymbol{T}(E)$, donde $E$ es el cuadrado de vértices $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$, es decir,

$$E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1,\ 1 \le v \le 2\}. \tag{1}$$

**Segunda forma de determinar la región *E*.**

Teniendo en cuenta las relaciones entre $x$ e $y$ dadas en el cambio de variable $\boldsymbol{T}$,

$$0 \le x \le 4 \Longleftrightarrow 0 \le 4u \le 4 \Longleftrightarrow 0 \le u \le 1,$$

$$3+\frac{x}{2}\leq y\leq 6+\frac{x}{2}\Longleftrightarrow 3+2u\leq 2u+3v\leq 6+2u\Longleftrightarrow 3\leq 3v\leq 6\Longleftrightarrow 1\leq v\leq 2.$$

Por tanto, $D=\boldsymbol{T}(E)$, donde $E$ es como en (1).

Una vez determinada la región $E$, aplicamos el Teorema 2.32 del cambio de variable. Teniendo en cuenta que $|\det J\boldsymbol{T}(u,v)|=12$,

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy=\iint_E 12(6u+3v)\,du\,dv$$

Ahora, aplicando el Corolario 2.13,

$$\begin{aligned}\int_E 12(6u+3v)\,du\,dv &= 12\int_1^2\left(\int_0^1(6u+3v)\,du\right)dv=12\int_1^2\Big[3u^2+3uv\Big]_0^1 dv=\\ = \ 36\int_1^2(1+v)\,dv &= 36\left[v+\frac{v^2}{2}\right]_1^2=90.\end{aligned}$$

Finalmente concluimos que $\iint_D (x+y)\,dx\,dy=90$.

**Observación.** La integral $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ también puede calcularse directamente. En efecto, $D$ es una región simple en la dirección de las $y$. Entonces, aplicando el Teorema 2.20 tenemos que

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy=\int_0^4\left(\int_{3+\frac{x}{2}}^{6+\frac{x}{2}}(x+y)\,dy\right)dx=\int_0^4\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{3+\frac{x}{2}}^{6+\frac{x}{2}}dx.$$

El alumno interesado puede continuar realizando operaciones en la fórmula anterior y comprobar que el resultado final coincide con el obtenido previamente usando el cambio de variable $\boldsymbol{T}$.

## $\mathbf{P_3}$

**Primera forma de resolución.**

Vamos a dar una expresión de $W$ en coordenadas cilíndricas, $r,\theta,z$, razonando a partir de las desigualdades del enunciado del problema. Para ello, observar que, como $z\geq 0$,

$$3z^2\leq x^2+y^2 \quad \text{y} \quad z^2\geq x^2+y^2-8\Longleftrightarrow 3z^2\leq r^2\leq z^2+8\Longleftrightarrow \sqrt{3}\,z\leq r\leq\sqrt{z^2+8},$$
$$3z^2\leq z^2+8\Longleftrightarrow z^2\leq 4\Longleftrightarrow 0\leq z\leq 2.$$

Y claramente, $y\geq 0\Longleftrightarrow r\sin\theta\Longleftrightarrow 0\leq\theta\leq\pi$. Por tanto, la región $W$ puede describirse utilizando coordenadas ciliíndricas de la siguiente forma.

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z,\ 0\leq z\leq 2,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ \sqrt{3}\,z\leq r\leq\sqrt{z^2+8}.$$

Entonces, aplicando el Teorema del Cambio de Variable para integrales de tres variables (último párrafo, p. 191) y el Teorema 4.3,

$$\begin{aligned}V(W) &= \iiint_W dV=\int_0^\pi\int_0^2\left(\int_{\sqrt{3}\,z}^{\sqrt{z^2+8}} r\,dr\right)dz\,d\theta=\pi\int_0^2\left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{3}\,z}^{\sqrt{z^2+8}}dz=\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^2(8-2z^2)\,dz=\frac{\pi}{2}\left[8z-2\frac{z^3}{3}\right]_0^2=\frac{16\pi}{3}.\end{aligned}\tag{2}$$

**Segunda forma de resolución.**

Vamos a expresar $W$ como unión de dos regiones simples en las $z$ que no se solapan. Las desigualdades en $z$ del enunciado equivalen a

$$x^2 + y^2 - 8 \leq z^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{3}, \ z \geq 0. \tag{3}$$

Observar que:

I. Si $x^2 + y^2 \leq 8$, la primera desigualdad de (3) se verifica para cualquier $z$.

II. Si $x^2 + y^2 \geq 8$, $x^2 + y^2 - 8 \leq z^2$ y $z \geq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 8} \leq z$.

III. $z^2 \leq \frac{x^2+y^2}{3}$ y $z \geq 0 \Longleftrightarrow z \leq \frac{\sqrt{3(x^2+y^2)}}{3}$.

También,

$$x^2 + y^2 - 8 \leq \frac{x^2 + y^2}{3} \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq 12.$$

Por tanto, $W = W_1 \cup W_2$, siendo $W_1$ y $W_2$ las regiones simples en las $z$, definidas por

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1, \ 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{3} \right\}, \\ D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8, \ y \geq 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_2, \ \sqrt{x^2 + y^2 - 8} \leq z \leq \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{3} \right\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq x^2 + y^2 \leq 12, \ y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Aplicando la versión del Teorema 2.28 para integrales triples,

$$V(W) = \iiint_{W_1} dV + \iiint_{W_2} dV.$$

Ahora, aplicando el Teorema 4.3 a cada una de las regiones $W_1$ y $W_2$,

$$\begin{aligned} V(W) &= \iint_{D_1} \left( \int_0^{\frac{\sqrt{3(x^2+y^2)}}{3}} dz \right) dx\, dy + \iint_{D_2} \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2-8}}^{\frac{\sqrt{3(x^2+y^2)}}{3}} dz \right) dx\, dy = \\ &= \iint_{D_1} \left( \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{3} \right) dx\, dy + \iint_{D_2} \left( \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{3} - \sqrt{x^2 + y^2 - 8} \right) dx\, dy. \end{aligned} \tag{4}$$

Utilizando coordenadas polares para la resolución de las integrales dobles de (4) y aplicando el Teorema del Cambio de Variable 2.32,

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}\,r^2}{3}\right)dr\,d\theta + \int_0^{\pi}\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}\,r^2}{3} - r\sqrt{r^2-8}\right)\,dr\,d\theta = \\ &= \pi\left[\frac{\sqrt{3}\,r^3}{9}\right]_0^{2\sqrt{2}} + \pi\left[\frac{\sqrt{3}\,r^3}{9} - \frac{(r^2-8)^{3/2}}{3}\right]_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{3}, \end{aligned}$$

obteniendo el mismo valor que en la primera forma de resolución.

**Tercera forma de resolución.**

Se trata de calcular la integral tripe $\iiint_W dV$ cambiando el orden de integración respecto al utilizado en la segunda forma de resolución. Ahora vamos a integrar primero respecto de $x$ e $y$ y posteriormente respecto de $z$. Para ello, observar que $W$ también puede describirse como

$$W = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 2,\ (x,y)\in W_z\right\},$$

donde, para cada $z$ tal que $0\le z\le 2$,

$$W_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3z^2 \le x^2+y^2 \le z^2+8,\ y\ge 0\},$$

es decir, $W_z$ es la región en $\mathbb{R}^2$ encerrada entre las semicircunferencias de centro $(0,0,z)$ y radio $\sqrt{3}\,z$ y de centro $(0,0,z)$ y radio $\sqrt{z^2+8}$, correspondiendo dichas semicircunferencias a la condición $y\ge 0$. Entonces,

$$V(W) = \int_0^2\left(\iint_{W_z} dx\,dy\right)dz = \int_0^2 \text{área }(W_z)\,dz.$$

El área de cada $W_z$ es

$$\begin{aligned} \text{área }(W_z) &= (\text{área de la semicircunferencia de mayor radio}) \\ &- (\text{área de la semicircunferencia de menor radio}) = \\ &= \frac{\pi(z^2+8)}{2} - \frac{\pi 3z^2}{2} = \frac{\pi}{2}(8-2z^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$V(W) = \frac{\pi}{2}\int_0^2 (8-2z^2)\,dz,$$

con lo que llegamos al mismo resultado que en (2).

**P$_4$**

**Primera forma de resolución.**

$\Sigma$ es un superficie dada en forma explícita con parametrización

$$\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x,y) = (x,y,g(x,y)),\ g(x,y) = 3x+2y+4,\ (x,y) \in D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\}.$$

Aplicando el Teorema de Stokes para este tipo de superficies (Teorema 3.35),

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{5}$$

Calculemos la integral de superficie que aparece en la fórmula anterior. Es trivial ver que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(x,y,z) = (0,0,-18(x^2+y^2)) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Por el Ejemplo 3.6, el vector normal a $\Sigma$ apuntando hacia arriba es

$$\boldsymbol{n_{\Phi_{explic}}}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = (-3,-2,1).$$

Entonces, aplicando la Definición 3.30,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{D_1} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x,y)) \cdot \boldsymbol{n_{\Phi_{explic}}}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{D_1} (0,0,-18(x^2+y^2)) \cdot (-3,-2,1)\, dx\, dy = -\iint_{D_1} 18(x^2+y^2)\, dx\, dy.$$

Utilizando coordenadas polares para calcular la última integral doble,

$$\iint_{D_1} 18(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 18r^3\, dr\, d\theta = 2\pi\left(18\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3\right) = 729\pi. \tag{6}$$

Por tanto, $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -729\pi$.

Aplicando (5) finalmente obtenemos que $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -729\pi$.

**Segunda forma de resolución.**

La superficie $\Sigma$ también puede parametrizarse mediante coordenadas cilíndricas en la siguiente forma

$$\boldsymbol{\Phi_{cilind}}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 3r\cos\theta + 2r\sin\theta + 4),\ (r,\theta) \in D_2 = [0,3] \times [0,2\pi].$$

El vector normal asociado a dicha parametrización es $\boldsymbol{n_{\Phi_{cilind}}}(r,\theta) = (-3r-2r, r)$. Como $r > 0$, la tercera componente de este vector es positiva, con lo que nuevamente tenemos la orientación de las normales hacia arriba. Entonces, aplicando la Definición 3.30,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{D_2} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(\boldsymbol{\Phi_{cilind}}(r,\theta)) \cdot \boldsymbol{n_{\Phi_{cilind}}}(r,\theta)\, dr\, d\theta =$$

$$= -\iint_{D_2} 18r^3\, dr\, d\theta,$$

con lo que llegamos a la misma integral que la segunda de (6).

Finalmente basta aplicar (5) a esta parametrización de $\Sigma^+$ (ver 3.4.2), obteniendo el mismo valor que en la primera forma de resolución.

**Observación.** El alumno interesado puede plantear el cálculo directo de la integral pedida, $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, aplicando las Definiciones 1.13 y 1.28 y teniendo en cuenta que una parametrización de $C^+$ es

$$\boldsymbol{c}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 9\cos t + 6\sin t + 4) \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

El trabajo a realizar después de dicho planteamiento es técnicamente complicado.