# Recuperación del examen final de Cálculo Integral
## 6 de septiembre de 2012 (Soluciones)

**_Cuestiones_**

**$C_1$** Observar que donde no sabemos si la función es continua NO es la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, que es unión de dos gráficas de funciones continuas, sino el círculo $x^2 + y^2 \leq 5$ completo, que incluye todo el interior y que no puede ponerse como unión de un número finito de gráficas de funciones continuas (no se exigía demostrar esto úlitmo, pero sí decirlo).

La respuesta es que no, porque no estamos en las hipótesis de ninguna de las condiciones suficientes de integrabilidad que se han estudiado durante el curso.

**$C_2$** La respuesta está en los apuntes, corolario 2.38 y la explicación que le precede.

**$C_3$** La respuesta está en los apuntes, página 80.

**$C_4$** Sí, en el caso de campos vectoriales. Porque la fórmula de la definición 3.28 obliga a que si sustituimos $\boldsymbol{F}$ por $-\boldsymbol{F}$, cambie el signo del valor de la integral.

No, en el caso de campos escalares. Porque la fórmula de la definición 3.13 no varía al cambiar un vector normal por su opuesto.

**$C_5$** Las propiedades 1 y 2 del enunciado son las propiedades 3 y 4 del teorema 1.31, en donde se domostró que 3 siempre implica 4.

Como en este caso $n$ es igual a 2 y $D$ no encierra agujeros, la parte C) del teorema garantiza que también 4 implica 3.

Conclusión: las propiedades 1 y 2 de la cuestión quinta son equivalentes.

**_Problemas_**

**$P_1$**

Lo que nos dice el enunciado es que $D$ es un conjunto contenido en la banda vertical $0 \leq x \leq 1$ y que está limitado por las gráficas de $y = x$ y de $y = x^3$. Lo de las gráficas que limitan significa que en la definición de $D$ aparecen, por una parte, la desigualdad $y \geq x$ o la desigualdad $y \leq x$, y, por otra, la desigualdad $y \geq x^3$ o la desigualdad $y \leq x^3$.

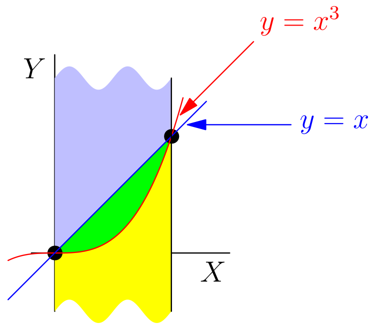


**Figura 1:** *Los cuatro conjuntos que se podrían obtener con las desigualdades. El amarillo y el azul no están acotados. El negro está formado solamente por dos puntos. El verde es una región simple.*

De las cuatro posibilidades que estas desigualdades nos permiten (ver figura 1), una da un conjunto formado solamente por dos puntos, otras dos dan conjuntos no acotados y la cuarta da un conjunto que es región simple, como se muestra en la figura 2. En consecuencia, interpretamos que:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^3 \leq y \leq x\},$$

que es una región simple en las $y$, puesto que $\varphi_1(x) = x^3$, $\varphi_2(x) = x$ cumplen todas las condiciones de la definición 2.18. Con razonamientos análogos se demostraría que $D$ también es región simple en las $x$.

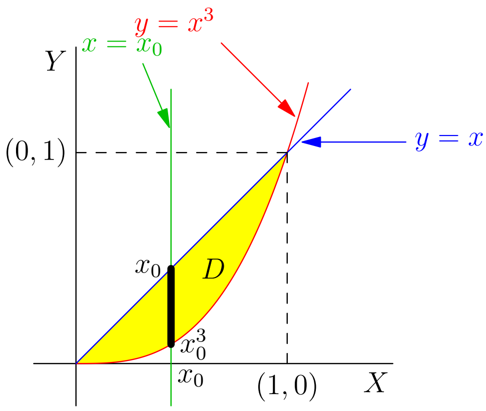


**Figura 2:** *Recinto $D$, en amarillo. Al trazar una recta vertical $x = x_0$, los valores de entrada y salida en el conjunto $D$ son los extremos de integración.*

**Parte (a).**

Aplicando el teorema 2.19, tenemos:

$$\iint_D (y^2 - x)\, dA = \int_0^1 \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (y^2 - x)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x} (y^2 - x)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[ \frac{y^3}{3} - xy \right]_{x^3}^{x} dx = \int_0^1 \left[ \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) - \left( \frac{x^9}{3} - x^4 \right) \right] dx =$$

$$= \left[ \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^{10}}{30} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{30} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{12}.$$

**Parte (b).**

Para aplicar el teorema de Riemann-Green buscaremos funciones $P$ y $Q$ que sean de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $D$ y tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - x$. Una posibilidad (no es la única, pero es una de las más sencillas) es tomar $P(x,y) = xy$, $Q(x,y) = xy^2$.

Aplicando el teorema de Riemann-Green, tenemos que

$$\iint_D (y^2 - x)\, dA = \int_{\partial D^+} xy\, dx + xy^2\, dy,$$

donde $\partial D^+$ es el borde de $D$ convenientemente orientado. Tal como se explica en la demostración del teorema 2.38, $\partial D^+ = C_1^+ + C_2^-$ (ver la figura 3), donde $C_1^+, C_2^+$ son las

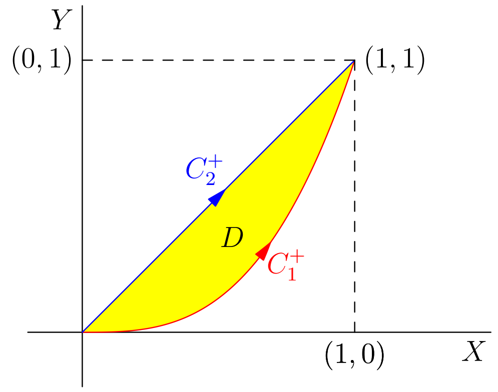


**Figura 3:** *El borde de $D$ con la orientación antihoraria es $\partial D^+ = C_1^+ + C_2^-$.*

curvas con parametrizaciones $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\boldsymbol{c_1}(t) = (t, t^3),\ \boldsymbol{c_2}(t) = (t,t) \quad (t \in [0,1]).$$

Para dichas curvas se tiene

$$\boldsymbol{c_1'}(t) = (1, 3t^2),\ \boldsymbol{c_2'}(t) = (1,1),$$

$$P(\boldsymbol{c_1}(t)) = t^4,\ Q(\boldsymbol{c_1}(t)) = t^7,\ P(\boldsymbol{c_2}(t)) = t^2,\ Q(\boldsymbol{c_2}(t)) = t^3.$$

Aplicando las definiciones 1.13 y 1.27, así como los teoremas 1.14 y 1.28, podemos calcular la integral sobre la curva $C_1^+ + C_2^-$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_1^+ + C_2^-} xy\,dx + xy^2\,dy &= \int_0^1 (t^4, t^7)\cdot(1, 3t^2)\,dt - \int_0^1 (t^2, t^3)\cdot(1,1)\,dt = \\ &= \int_0^1 (t^4 + 3t^9 - t^2 - t^3)\,dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{3t^{10}}{10} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\iint_D (y^2 - x)\,dA = -\frac{1}{12}$. Como es de esperar, obtenemos el mismo valor que en (a).

**P₂**

Observamos, en primer lugar, que de los cuatro subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que se pueden obtener a partir de las desigualdades

$$\left.\begin{array}{c} z \le \sqrt{x^2+y^2} \\ \vee \\ z \ge \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \wedge \left\{\begin{array}{c} z \le 3 \\ \vee \\ z \ge 3 \end{array}\right.$$

la única combinación de desigualdades que da lugar a un conjunto acotado es

$$z \ge \sqrt{x^2+y^2} \quad \wedge \quad z \le 3.$$

Éste es por tanto el conjunto $W$ al que se refiere el enunciado,

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 3\}.$$

La condición necesaria y suficiente para que, dado un punto $(x, y)$ del plano $XY$, exista algún $z$ tal que $(x, y, z) \in W$ es, obviamente, $\sqrt{x^2+y^2} \le 3$. En otras palabras, la proyección de $W$ sobre el plano $XY$ es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9\},$$

el círculo de centro el origen y radio 3, que es una región bidimensional simple. Como consecuencia, $W$ es una región tridimensional simple en las $z$,

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 3\},$$

donde las funciones $\alpha(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\beta(x,y) = 3$, definidas sobre $D$, cumplen las condiciones de la definición 4.2.

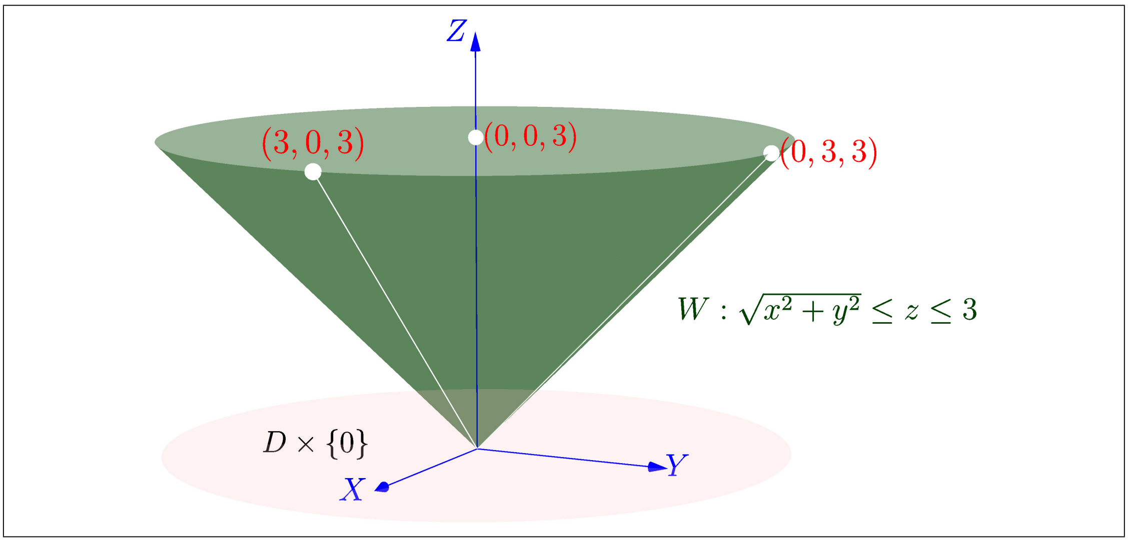


**Figura 4:** *Conjunto $W$, limitado por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y por $z = 3$. La proyección de $W$ sobre el plano $XY$ es el círculo $D$.*

**Primera forma de resolución: pasando a coordenadas cilíndricas.**

Para describir el conjunto $W$ en coordenadas cilíndricas no hay más que sustituir las definiciones de $r$ y $\theta$ en las desigualdades que definen a $W$, y añadir esas desigualdades a las establecidas con carácter general para este tipo de coordenadas (ver apartado 4.5):

$$W^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq z \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \}.$$

Aplicamos el teorema del cambio de variable y el teorema 4.3 (junto con los comentarios posteriores a él). Decidimos integrar primero en $r$, después en $z$ y por último en $\theta$.

Para determinar los límites razonando sobre la figura 5, procederemos de la siguiente manera:

1. En primer lugar hay que observar cuáles son los valores extremos que puede tomar el ángulo $\theta$, en este caso 0 y $2\pi$, puesto que damos una vuelta completa. A continuación elegimos uno cualquiera de esos $\theta$, que determina un semiplano del cual forma parte el rectángulo gris de la figura 5. Observamos la intersección de ese semiplano con $W$, que es el triángulo $OPQ$. Dentro de ese triángulo es donde tenemos que seguir buscando los límites de $z$ y $r$.

2. Dentro de triángulo $OPQ$, observamos que $z$ puede tomar todos los valores entre 0 y 3, independientemente de cuánto valga $\theta$, puesto que los puntos $O$ y $P$ siempre están en el triángulo. Entonces elegimos uno de esos $z$ (en rojo en la figura) y vamos a buscar los valores extremos del parámetro $r$ para esos valores de $\theta$ y $z$. Los puntos del segmento negro incluyen todas las posibilidades, es decir, una vez fijados $\theta$ y $z$, la intersección de $W$ con el semiplano gris y con el plano horizontal a la altura

$z$ es exactamente el segmento negro. Es en ese segmento negro donde tenemos que encontrar el mínimo y el máximo valor que puede alcanzar $r$.

3. El mínimo de $r$ será siempre 0, puesto que el punto blanco pertenece al segmento negro. El máximo de $r$, en cambio, no es constante, se alcanza en el punto azul y será mayor cuanto mayor sea $z$ (del ángulo no depende). Como el punto azul está sobre la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$, el segmento negro mide lo mismo que el rojo. Luego, una vez elegidos $\theta$ y $z$ en sus respectivos rangos, el máximo valor posible de $r$ es precisamente $z$.

La figura ilustra el sentido gráfico que tienen los límites de cada integral, si bien el argumento riguroso para determinar esos límites pasa por deducirlos de las desigualdades que definen a $W^*$, que, en este caso, es bastante sencillo.

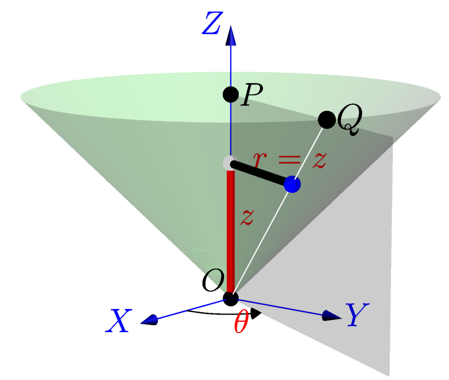


**Figura 5:** *Determinación de los extremos de integración en coordenadas cilíndricas.*

$$\iiint_W (x^2+y^2+2z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} (r^2+2z)r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(\int_r^3 (r^3+2zr)\,dz\right) dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left[r^3z + rz^2\right]_r^3 dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left[(3r^3+9r)-(r^4+r^3)\right] dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (2r^3+9r-r^4)\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{2r^4}{4}+\frac{9r^2}{2}-\frac{r^5}{5}\right]_0^3 = \frac{324\pi}{5}.$$

**Segunda forma de resolución: integrando primero en $z$ y haciendo después la integral doble en $x$, $y$.**

La definición de $W$ a la que hemos llegado al principio es suficiente para que demos por conocidos los extremos de integración en el orden propuesto. Si quisiéramos obtenerlos razonando sobre una figura, imaginaríamos una recta vertical que corta a $D$ y buscaríamos la intersección de esa recta con $W$. En la figura 6 hemos dibujado la recta vertical que pasa por el punto genérico $(x, y, 0) \in D \times \{0\}$. La intersección con $W$ es el segmento

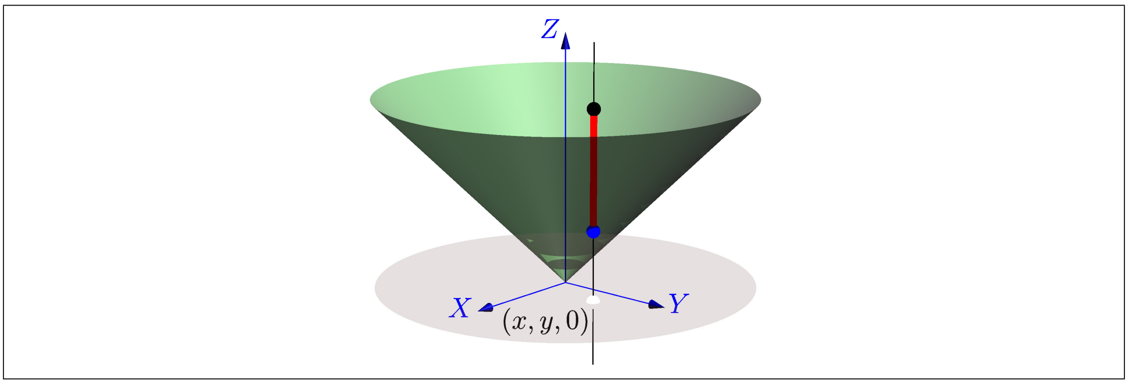


**Figura 6:** *Para cada $(x, y) \in D$, el valor de $z$ para el que la recta vertical que pasa por $(x, y, 0)$ entra en $W$ es $\sqrt{x^2+y^2}$; y el valor de $z$ por el que sale es $3$. La primera integral a lo largo de $z$ puede considerarse una integral sobre el segmento rojo.*

rojo, limitado por los puntos azul y negro que corresponden a las alturas $\sqrt{x^2+y^2}$ y 3, respectivamente.

Apelamos nuevamente al teorema 4.3 para obtener

$$\iiint_W (x^2+y^2+2z)\, dV = \iint_D \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} (x^2+y^2+2z)\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} (x^2+y^2+2z)\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D \Big[ (x^2+y^2)z + z^2 \Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left( [3(x^2+y^2)+9] - [(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} + x^2+y^2] \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left[ 2(x^2+y^2) + 9 - (x^2+y^2)^{3/2} \right] dx\, dy.$$

Ahora pasamos a coordenadas polares y aplicamos el teorema del cambio de variable (teorema 2.32) para llegar a la misma integral de antes:

$$\iint_D \left[ 2(x^2+y^2) + 9 - (x^2+y^2)^{3/2} \right] dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (2r^2+9-r^3) r\, dr\, d\theta.$$

**Tercera forma de resolución: Haciendo primero la integral doble en $x$, $y$ e integrando después en $z$.**

Para ello consideramos los cortes de $W$ con los planos de altura $z$ (que llamaremos $W_z$), variando $z$ desde 0 hasta 3, y aplicaremos el teorema de Fubini tridimensional:

$$\iiint_W (x^2+y^2+2z)\,dV = \int_0^3 \left( \iint_{W_z} (x^2+y^2+2z)\,dx\,dy \right) dz,$$

donde para cada $z_0 \in [0,3]$, $W_{z_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z_0) \in W\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq z_0^2\}$.

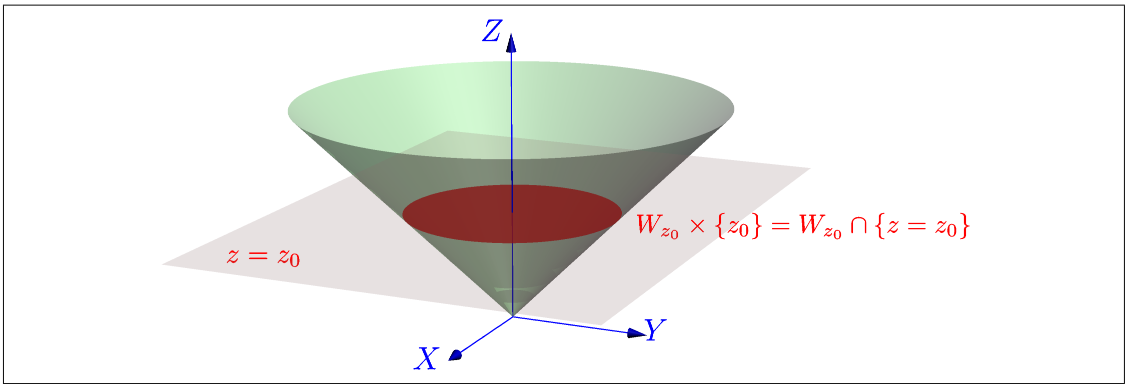


**Figura 7:** *Para cada $z_0 \in [0,3]$, la intersección de $W$ con el plano $z = z_0$ es el círculo rojo.*

Para calcular la integral doble sobre $W_z$ que aparece en el miembro de la derecha, pasamos a coordenadas polares aplicando el teorema del cambio de variable bidimensional. Entonces:

$$\int_0^3 \left( \iint_{W_z} (x^2+y^2+2z)\,dx\,dy \right) dz = \int_0^3 \left( \int_0^{2\pi} \int_0^z (r^3+2zr)\,dr\,d\theta \right) dz =$$

$$= \int_0^3 \left( 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} + zr^2 \right]_0^z \right) dz = 2\pi \int_0^3 \left( \frac{z^4}{4} + z^3 \right) dz = 2\pi \left[ \frac{z^5}{20} + \frac{z^4}{4} \right]_0^3 =$$

$$= 2\pi \left( \frac{3^5}{20} + \frac{3^4}{4} \right) = \frac{324\pi}{5}.$$

Como era de esperar, todos los procedimientos expuestos nos dan el mismo valor.

**$\mathbf{P_3}$**

La curva $C$ es el borde, $\partial\Sigma$, de la superficie plana $\Sigma$ definida en explícitas por $\Sigma = \{(x,y,g(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D\}$ (ver figuras 8 y 9), donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}, \quad g(x,y) = 1 - 2x + 3y.$$

$D$ se ha obtenido proyectando $\Sigma$ sobre el plano $XY$ y a continuación ignorando la última coordenada.

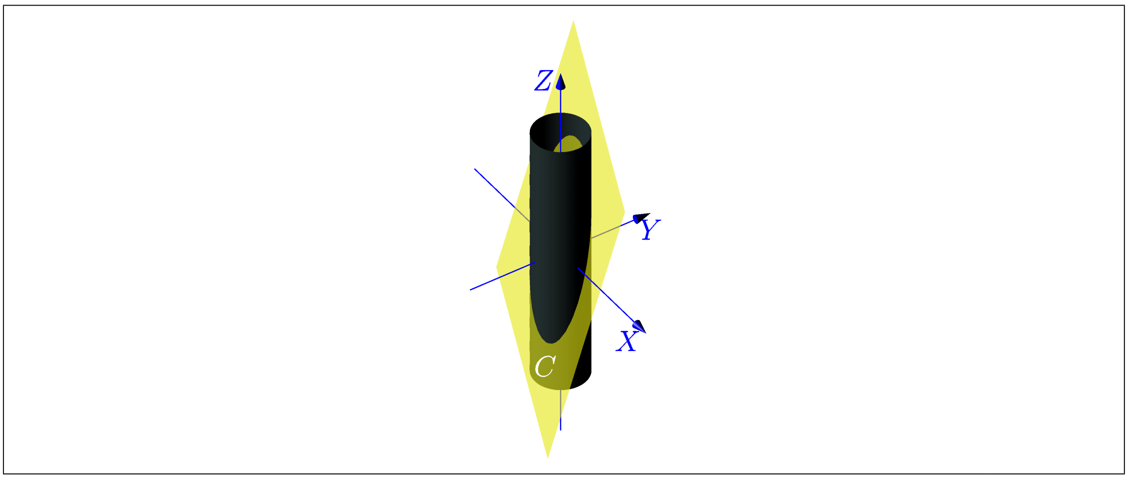


**Figura 8:** *La curva intersección del cilindro y el plano es una elipse $C$.*

Elegimos como orientación positiva de $\Sigma$ la que corresponde al vector normal $\boldsymbol{n}$ apuntando hacia las $Z$ positivas, es decir,

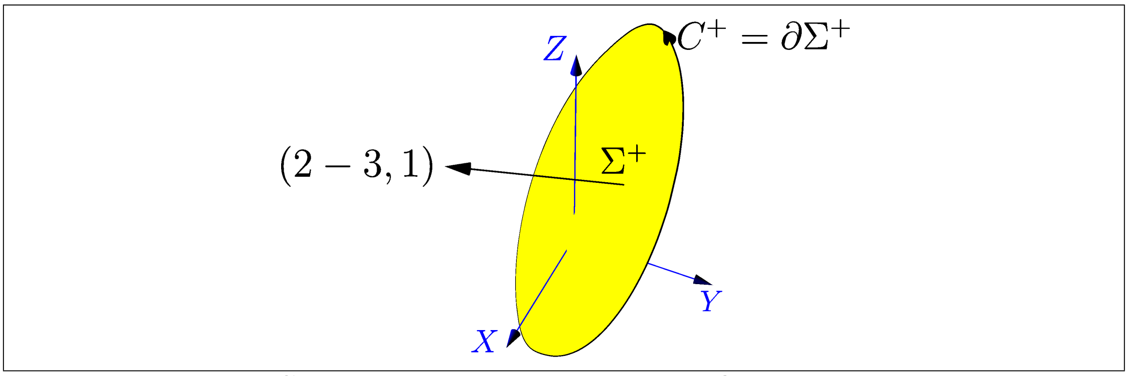


**Figura 9:** *La curva $C$ coincide con el borde de la superficie $\Sigma$, que es el trozo del plano que está en la parte de dentro del cilindro.*

$$\boldsymbol{n}(x,y,z) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) = (2,-3,1),$$

y como orientación positiva de $C$ la asociada con $\partial\Sigma^+$ (ver la definición 3.34), es decir, $C^+ = \partial\Sigma^+$. Aplicando el teorema de Stokes para superficies en forma explícita (teorema 3.35) convertimos la integral de línea pedida en una integral de superficie:

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Calculamos el rotacional de $\boldsymbol{F}$ y a continuación la integral de superficie, aplicando el teorema 3.22, con lo que el valora de la integral es

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma^+} (0, 0, -15(x^2 + y^2)) \cdot (0, 0, 1) = -15 \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy =$$

$$= -15 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\, dr\, d\theta = -30\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = -120\pi,$$

(entre la primera línea y la segunda hemos hecho un cambio a coordenadas polares).