Examen final de Cálculo Integral
18 de junio de 2012 (Soluciones)

Cuestiones

C$_1$ Sí se puede asegurar que es integrable, como consecuencia del teorema 4.1 de los apuntes:

Llamamos W y $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ a la esfera y a la función del enunciado, respectivamente. Tomamos el paralelepípedo $P = [-2,2]^3$, que contiene a la esfera, y llamamos $f^* : P \longrightarrow \mathbb{R}$ a la prolongación de f con ceros en todos los puntos de $P \backslash W$. Entonces f^* es acotada y sus discontinuidades están contenidas en la unión de las gráficas de tres funciones de dos variables:

$$\alpha : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(x,y) = -\sqrt{4-x^2-y^2}$$
$$\beta : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$
$$\gamma : [-2,2] \times [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(x,y) = 1-x-y.$$

(Hace falta considerar también α y β, cuyas gráficas forman la superficie esférica, porque al prolongar la funicón inicial f con ceros pueden haberse introducido discontinuidades en puntos de la superficies esférica donde f era continua.)

C$_2$ Ver el apartado 2.6.2(4) de los apuntes.

C$_3$ La fórmula

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} \, d\sigma,$$

que forma parte de la definición 3.28 de los apuntes.

C$_4$ Sí, en el caso de campos vectoriales. Porque la fórmula de la definición 3.28 obliga a que si sustituimos $\boldsymbol{F}$ por $-\boldsymbol{F}$, cambie el signo del valor de la integral.

No, en el caso de campos escalares. Porque la fórmula de la definición 3.13 no varía al cambiar un vector normal por su opuesto.

C$_5$ El razonamiento utilizando el teorema de Stokes está en el apartado 3.4.2(3.a) de los apuntes. Alternativamente, aplicando el teorema de la Divergencia (y llamando W a la esfera y $\boldsymbol{F}$ al campo de clase $\mathcal{C}^2$),

$$\iint_{\partial W^+} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) \, dV = \iiint_W 0 \, dV \;= 0,$$

puesto que la divergencia del rotacional de un campo de clase $\mathcal{C}^2$ es siempre nula en todos los puntos.

$\boxed{\textit{Problemas}}$

$\mathbf{P_1}$

Primera forma de resolución.– D es una región simple en la dirección de las y. En efecto,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},$$

donde

$$\varphi_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{array} \right\}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{2},$$

siendo φ_1 y φ_2 funciones continuas en $[0,2]$.

Aplicando el Teorema 2.19, tenemos:

$$\iint_D y\,dA = \int_0^2 \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{x}{2}} y\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{x-1}^{\frac{x}{2}} y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{x}{2}} dx + \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x-1}^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{8}\,dx - \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2})\,dx =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{6}.$$

Segunda forma de resolución.– D es una región simple en la dirección de las x. En efecto,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

donde

$$\psi_1(y) = 2y, \quad \psi_2(y) = y+1,$$

siendo ψ_1 y ψ_2 funciones continuas en $[0,1]$.

Aplicando el Teorema 2.20, tenemos:

$$\iint_D y\,dA = \int_0^1 \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_{2y}^{y+1} y\,dx \right) dy = \int_0^1 y(y+1-2y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (y - y^2)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Y obtenemos el mismo resultado que en la primera forma de resolución.

$\mathbf{P_2}$ Vamos a exponer tres formas de resolver este problema. Antes de todo, observar que el cono y la semiesfera se cortan cuando $2-\sqrt{x^2+y^2}=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$. Tomando como incógnita $\sqrt{x^2+y^2}$, se obtiene que dicho corte tiene lugar cuando $\sqrt{x^2+y^2}=1$, o equivalentemente, cuando $z=1$.

Primera forma de resolución.– El volumen pedido V es:

$$V=\iiint\limits_W dx\,dy\,dz, \tag{1}$$

donde W es la región simple en las z formada por los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tales que

$$-1\leq x\leq 1,\quad -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2},\quad 1-\sqrt{1-x^2-y^2}\leq z\leq 2-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Aplicando la fórmula de integrales triples reiteradas en (1), integrando primero respecto de z y después respecto de y y x respectivamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx = \qquad (2)\\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[(2-\sqrt{x^2+y^2})-(1-\sqrt{1-x^2-y^2})\right]dy\,dx = \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2})\,dy\,dx. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares y aplicando el Teorema del Cambio de Variable (Teorema 2.31):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1-r+\sqrt{1-r^2})\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^2+r\sqrt{1-r^2})\,dr\,d\theta = \\ &= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}-\frac{1}{2}\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \pi. \qquad (3) \end{aligned}$$

Segunda forma de resolución.– Vamos a calcular la integral de (1) utilizando coordenadas cilíndricas. Aplicando el Teorema del Cambio de Variable tenemos que

$$V=\iiint\limits_{W^*} r\,dr\,d\theta\,dz, \tag{4}$$

donde W^* es la región simple en las z definida por:

$$W^*=\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq r\leq 1,\, 0\leq\theta\leq 2\pi,\, 1-\sqrt{1-r^2}\leq z\leq 2-r\}.$$

Aplicando la fórmula de integrales triples reiteradas en (4), integrando primero respecto de z y después respecto de r y θ respectivamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left[(2-r)-(1-\sqrt{1-r^2})\right]\,dr\,d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^2+r\sqrt{1-r^2})\,dr\,d\theta. \end{aligned}$$

Y llegamos a la misma integral que en la primera linea de (3).

Tercera forma de resolución.– Se trata de calcular la integral triple de (1) cambiando el orden de integración respecto al utilizado en (2). Ahora vamos a integrar primero respecto de x e y y posteriormente respecto de z. En primer lugar, observar que, para un z fijo:

1. En la semiesfera tenemos la circunferencia de centro $(0,0,z)$ y radio $\sqrt{1-(z-1)^2}$.
2. En el cono tenemos la circunferencia de centro $(0,0,z)$ y radio $2-z$.

Entonces:

$$V=\int_0^1\left[\iint_{D_1} dx\,dy\right]\,dz+\int_1^2\left[\iint_{D_2} dx\,dy\right]\,dz.$$

• La primera integral corresponde al volumen encerrado por la semiesfera desde $z=0$ hasta el valor de z en el que ésta intersecta con el cono ($z=1$). Sabemos que, para cada z, D_1 es el círculo de centro $(0,0,z)$ y radio $\sqrt{1-(z-1)^2}$. Esto implica que

$$\iint_{D_1} dx\,dy = \text{ área de } D_1=\pi(1-(z-1)^2).$$

• La segunda integral corresponde al volumen encerrado por el cono desde donde intersecta con la semiesfera ($z=1$) hasta el valor máximo que puede tomar z en el cono ($z=2$). Sabemos que, para cada z, D_2 es el círculo de centro $(0,0,z)$ y radio $2-z$. Esto implica que

$$\iint_{D_2} dx\,dy = \text{ área de } D_2=\pi(2-z)^2.$$

Entonces:

$$V=\int_0^1 \pi(1-(z-1)^2)\,dz+\int_1^2\pi(2-z)^2\,dz=\pi\left[z-\frac{(z-1)^3}{3}\right]_0^1-\pi\left[\frac{(2-z)^3}{3}\right]_1^2=\pi.$$

Y obtenemos el mismo resultado que en la primera y segunda formas de resolución.

P_3 Mediante operaciones triviales obtenemos que

$$(\nabla \times \boldsymbol{F})(x,y,z) = \left(x^2\sqrt{z} - \frac{x}{2\sqrt{z}} - y\right)\boldsymbol{i} + \left(-2xy\sqrt{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}} - 3z^2y\right)\boldsymbol{j} + \left(\sqrt{z}+z^3\right)\boldsymbol{k}. \quad (5)$$

Primera forma de resolución.– Vamos a calcular directamente la integral de superficie pedida. Parametrizamos Σ^+ utilizando coordenadas cilindrícas, con lo que los puntos (x,y,z) de Σ^+ se describen de la siguiente forma:

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = z, \quad (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [1, 4].$$

Siguiendo las notaciones de la página 80 de los apuntes de teoría, un vector normal a Σ^+ en cada punto es:

$$\boldsymbol{n}(\theta,z) = \boldsymbol{T}_\theta(\theta,z) \times \boldsymbol{T}_z(\theta,z) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (0,0,1) = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Vemos cómo esta normal apunta hacia afuera, con lo que corresponde con la orientación considerada en el enunciado. Entonces, aplicando la Definición 3.28:

$$\iint_{\Sigma^+} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_1^4 (\nabla \times \boldsymbol{F})(r,\theta)\,dz\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^4 \left(\sqrt{z}\cos^2\theta - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{z}} - \sin\theta, -2\sqrt{z}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2\sqrt{z}} - 3z^2\sin\theta, \sqrt{z}+z^3\right)\cdot$$

$$\cdot(\cos\theta, \sin\theta, 0)\,dz\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^4 \left(\sqrt{z}\cos^3\theta - \frac{\cos^2\theta}{2\sqrt{z}} - \sin\theta\cos\theta - 2\sqrt{z}\cos\theta\sin^2\theta + \frac{\sin\theta}{2\sqrt{z}} - 3z^2\sin^2\theta\right)dz\,d\theta.$$

Como puede observarse, a partir de este punto, para obtener el resultado final, hay que realizar bastantes operaciones.

Resultan más sencillas, desde el punto de vista de las operaciones involucradas, las dos formas de resolución que se exponen a continuación.

Segunda forma de resolución.– Vamos a calcular la integral de superficie pedida aplicando el Teorema de Stokes. Teniendo en cuenta el apartado 3.b) de la página 101 de los apuntes de teoría, el borde del cilindro es la unión de las dos circunferencias que lo límitan. En este caso, dichas circunferencias son:

- la circunferencia $\boldsymbol{c_1}$ correspondiente a $z = 1$, es decir,

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1.$$

- la circunferencia $\boldsymbol{c_2}$ correspondiente a $z = 4$, es decir,

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 4.$$

Dichas circunferencias admiten las siguientes parametrizaciones:

$$\boldsymbol{c_1}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1), \quad \boldsymbol{c_2}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 4), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

con lo que

$$\boldsymbol{c_1'}(\theta) = \boldsymbol{c_2'}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Entonces, aplicando el Teorema de Stokes y teniendo en cuenta las orientaciones para Σ^+ y $\partial\Sigma^+$ consideradas en el punto 4 de la página 101 de los apuntes de teoría, tenemos que

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{c_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{c_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

También, de acuerdo con las anteriores parametrizaciones de $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$ y con la Definición 1.12, obtenemos:

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c_1}(\theta)) \cdot \boldsymbol{c_1'}(\theta)\, d\theta - \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c_2}(\theta)) \cdot \boldsymbol{c_2'}(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \sin\theta, \cos\theta + \sin\theta, \cos^2\theta \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) -$$

$$- \int_0^{2\pi} (2 - 64\sin\theta, 2\cos\theta + 4\sin\theta, 2\cos^2\theta\sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta + 1 + \sin\theta\cos\theta)\, d\theta - \int_0^{2\pi} (-2\sin\theta + 64\sin^2\theta + 2\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= \left[\cos\theta + \theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} -$$

$$- \left[2\cos\theta + 64\left(\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\right) + 2\left(\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)\right) + 4\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$= -64\pi$ (utilizar las tablas para las primitivas de $\sin^2\theta$ y $\cos^2\theta$).

Tercera forma de resolución.– Finalmente, vamos a calcular la integral de superficie pedida aplicando el Teorema de la Divergencia.

Sea W la región simple en $\mathbb{R}^3$ encerrada por la superficie Σ, es decir,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 1 \leq z \leq 4\}.$$

Aplicando el Teorema de de la Divergencia (Teorema 4.12), tenemos que

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})\, dx\, dy\, dz.$$

Puesto de la divergencia de un rotacional es nula, lo anterior implica que

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0.$$

Por otra parte, la frontera de W, ∂W, es la unión de la superficie cilíndrica Σ del enunciado, de la tapa inferior del cilindro (que denotamos por Σ_1) y de la tapa superior del cilindro (que denotamos por Σ_2) . Teniendo en cuenta las orientaciones mediante normales exteriores establecidas en el Teorema de la Divergencia (Definición 4.10), la anterior fórmula se traduce en:

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0,$$

es decir,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{6}$$

Pasamos a calcular $\iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ e $\iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$. Observar que:

- Σ_1^+ es una superficie definida en forma explícita por $z(x, y) = 1$, $(x, y) \in D$, donde

  $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

  El vector normal correspondiente a Σ_1^+ es $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ (aplicar la expresión del vector normal para superficies en forma explícita, dada en la página 83 de los apuntes de teoría).
- Análogamente, Σ_2^+ es una superficie definida en forma explícita por $z(x, y) = 4$, $(x, y) \in D$, done D está definido como antes. El vector normal correspondiente a Σ_2^+ es también $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$.

Entonces, aplicando la Definición 3.28, obtenemos

$$\iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{D} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(x, y, 1) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy.$$

Además,

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) \;=\; \text{tercera componente de } (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(x, y, 1) = 2$$

(la última igualdad se sigue de (5)). Por lo tanto,

$$\iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 2 \iint_{D} dx\, dy = 2\,(\text{área de } D) = 2\pi. \tag{7}$$

Análogamente:

$$\iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(x, y, 4) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy =$$

$$= 66\pi \iint_D dx\, dy = 66\,(\text{área de } D) = 66\pi \quad (8)$$

(en este caso, tercera componente de $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(x, y, 4) = 66$).
Finalmente, aplicando (6), (7) y (8),

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi - 66\pi = -64\pi.$$

Y obtenemos el mismo resultado que en la segunda forma de resolución.