Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

17 de junio de 2013 (Teoría)

- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.
- Todas las cuestiones puntúan por igual para la nota del examen final.
- Las cuestiones **C**$_1$ y **C**$_2$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- Las cuestiones **C**$_3$ y **C**$_4$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

C$_1$ Considérese la gráfica de la función $y = |x|$, con $-1 \le x \le 1$. ¿Es posible parametrizarla como un camino de clase $\mathcal{C}^1$, es decir, que tenga derivadas continuas en todos los puntos?

C$_2$ Supóngase que $f : R = [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. Si f es discontinua en cada uno de los infinitos puntos de la parábola $y = x^2$, entonces seguro que f no es integrable sobre R.
2. Si f es continua en todos lo puntos menos en los de la parábola $y = x^2$, entonces seguro que f es integrable sobre R.
3. Para que f sea integrable es necesario que el conjunto de los puntos donde es discontinua sea finito.

C$_3$ Sea Σ la superficie esférica unidad, es decir, el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por $x^2+y^2+z^2 = 1$. Dar una parametrización $\Phi : D \longrightarrow \Sigma$ que describa toda la superficie, $\Phi(D) = \Sigma$, y que en el punto $(0,0,1) \in \Sigma$ nos proporcione un vector normal a Σ que no sea nulo.

C$_4$ Considérese el conjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x, \quad x^2 + y^2 \le z \le 2.$$

Completar los límites de integración que faltan en

$$\text{Vol}\,(W) = \int_0^1 \left[\int_{\boxed{??}}^2 \left(\int_y^{\boxed{??}} dx \right) dz \right] dy.$$

C$_5$ Suponiendo que se tiene demostrado el teorema de la Divergencia de Gauss para esferas, ¿cómo se deduciría el mismo resultado para una diferencia de dos esferas concéntricas?

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

17 de junio de 2013 (Problemas)

- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.
- Todos los problemas puntúan por igual para la nota del examen final.
- El problema $\mathbf{P}_2$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- El problema $\mathbf{P}_3$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

$\mathbf{P_1}$ Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (e^x, 3zy^2, y^3) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

y sea $\boldsymbol{c} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ el camino definido por

$$\boldsymbol{c}(t) = (\sin t, \cos t, 2) \quad (t \in [0, \pi]).$$

Calcular $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.

$\mathbf{P_2}$ Sea $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4,\ 3 + \frac{x}{2} \le y \le 6 + \frac{x}{2}\right\}$. Calcular $\iint_D (x + y)\, dx\, dy$, utilizando el cambio de variables $\boldsymbol{T}(u, v) = (4u, 2u + 3v)$.

$\mathbf{P_3}$ Calcular el volumen de la región W de $\mathbb{R}^3$ definida por las desigualdades

$$3z^2 \le x^2 + y^2, \quad z^2 \ge x^2 + y^2 - 8, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$$

$\mathbf{P_4}$ Sea Σ^+ la parte del plano $3x + 2y - z + 4 = 0$ encerrada dentro del cilindro $x^2 + y^2 \le 9$, con la orientación de las normales hacia arriba. Sea C^+ el borde de Σ^+ orientado de acuerdo con el Teorema de Stokes. Consideremos el campo vectorial $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (6y^3 - x, y^2 - 6x^3, \sqrt{z^4 + 1}) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Calcular $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.

Entregar cada problema en una hoja distinta.