Análisis Matemático y Métodos Numéricos
(1º del Grado en Ingeniería Informática, Universidad de Cantabria)
Examen final, 2 de junio de 2016

Soluciones

1.
$$[f \circ g \circ h](x) = f(g(h(x))) = f\left(g\left(x^2\right)\right) = f\left(\frac{1}{2x^2+1}\right) = 2x^2+1.$$

Y el dominio de la función compuesta es todo $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}\backslash\{-1/2\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}\backslash\{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Observación tras corregir los exámenes: A pesar de que los dominios de f y de g no sean todo $\mathbb{R}$, en este caso el dominio de $f \circ g \circ h$ sí que lo es.

2. Solamente puede deducirse que en y_3 hay un máximo local y que en x_4 hay un mínimo local. En efecto:

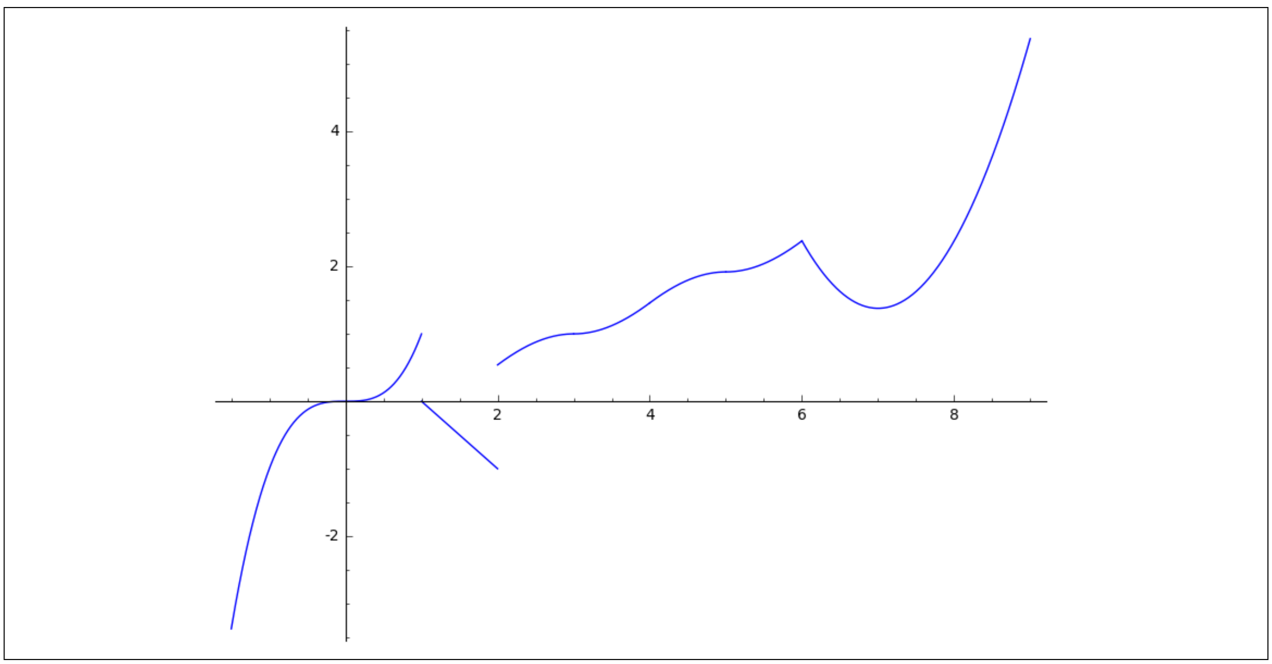

Figura 1: Una función que cumple todas las condiciones impuestas en la cuestión 2, con $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $y_3 = 6$, $x_4 = 7$. Para esta f estamos tomando $f(y_1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, $f(y_2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$, por lo que ni en y_1 ni en y_2 hay un extremo local. Tambien tomamos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, por lo que no hay extremos absolutos.

- Los puntos críticos son todos los x_i y todos los y_j, pero ninguno más. Luego fuera de estos siete puntos no puede haber extremos locales.
- Donde no hay cambio entre crecimiento y decrecimiento (puntos x_1, x_2 y x_3), no hay extremo local.
- Donde hay cambio entre crecimiento y decrecimiento pero no sabemos si la función es continua (puntos y_1 e y_2), no podemos concluir si hay extremo local o no lo hay (ver observación de la página 213 del libro de texto).
- Finalmente, el teorema 4.3.4 garantiza un máximo local en y_3 y un mínimo local en x_4.

- En cuanto a los extremos absolutos, no podemos concluir nada, puesto que no conocemos el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$, ni si hay asíntotas verticales (podría haberlas en y_1 y en y_2, teniendo siempre presente que f ha de estar definida en cada uno de estos dos puntos, aunque en alguno de ellos haya una asíntota vertical).

Un resumen de todo lo anterior puede esquematizarse como sigue, donde "(??)" significa que no se puede deducir nada sobre la existencia de extremos, "NO" significa que no hay extremo local y "N.E." significa no existe:

x	$-\infty$		x_1		y_1		y_2		x_2		x_3		y_3		x_4		$+\infty$
$f(x)$	(??)	$\nearrow$	NO	$\nearrow$	(??)	$\searrow$	(??)	$\nearrow$	NO	$\nearrow$	NO	$\nearrow$	MÁX	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$	(??)
$f'(x)$		$+$	0	$+$	(N.E)	$-$	(N.E)	$+$	0	$+$	0	$+$	(N.E)	$-$	0	$+$	

En la figura se muestra un ejemplo de función que solamente tiene estos dos extremos locales y ningún extremo absoluto.

Observaciones tras corregir los exámenes:

- Del hecho de que de la función sepamos que es continua en $(x_2, +\infty)$ no puede deducirse que es discontinua en algún punto menor que x_2.
- Los puntos y_1, y_2, y_3 son del eje horizontal, no del vertical, puesto que son puntos en los que la función f no es derivable.
- En los puntos de la gráfica que correspondan a algún x_i la tangente ha de ser horizontal, puesto que $f'(x_i) = 0$.

3. Un círculo de radio r tiene área πr^2. Sea $A : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $A(r) = \pi r^2$. La función A es continua y además $A(0) = 0$ y $A(10) = 100\pi \approx 314$. Como $0 < 250 < A(10)$, se deduce del teorema de los valores intermedios que existe un número $c \in (0, 100)$ tal que $A(c) = 250$.

   Observación tras corregir los exámenes: En este caso también era válido despejar el radio que corresponde a un área de 250 centímetros cuadrados y comprobar que $\sqrt{250/\pi} \in [0, 10]$.

4. (a) Sí, por el teorema 5.2.5.

   (b) Sí, porque derivable implica continua.

   (c) Sí, por lo mismo que (b).

   Observaciones tras corregir los exámenes:

   - "f es una primitiva" significa que hay alguna función g tal que $f' = g$, lo cual equivale a decir que f es derivable.
   - La tesis del teorema fundamental del cálculo no solamente es que F sea derivable, sino que F es derivable y además su derivada es f.
   - No es correcto usar, dentro del mismo contexto, una misma letra para denominar a dos funciones distintas. En consecuencia, aquí no es correcto poner $f(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

- Se preguntaba si cada una de las condiciones (a), (b), (c) implica que existe F' y $F' = f$. No se preguntaba si las condiciones (a), (b), (c) pueden deducirse de que existe F' y $F' = f$; contestar a esto último era erróneo.
- No es correcto decir que según el teorema fundamental del cálculo, para que F sea derivable un *requisito* es que f sea continua.
- Reproducir el enunciado del TFC sin contestar a las preguntas planteadas supone no contestar a lo que se pedía.
- No debe confundirse "función derivable" con "función derivada".

5. Llamamos x, y, z a las tres dimensiones de la caja, donde z es la altura. El volumen es entonces $12 = xyz$, por lo que $z = 12/(xy)$. El coste del material es, en euros,

$$f(x, y) = 4xy + 3(2xz + 2yz) = 4\left(xy + \frac{18}{x} + \frac{18}{y}\right),$$

donde la función f la consideramos definida sobre el primer cuadrante abierto, $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, puesto que para $x \leq 0$ o $y \leq 0$ no tendría sentido el enunciado.

En primer lugar buscamos los puntos críticos de f. Para ello imponemos la condición de que el gradiente de f sea nulo. Igualando a 0 las dos derivadas parciales de f se obtiene $f_x = 4y - 72/x^2 = 0$, $f_y = 4x - 72/y^2 = 0$, de donde $xy^2 = 18 = x^2y$, luego $x = y$; sustituyendo en una cualquiera de las dos primeras ecuaciones obtenemos $x = y = (18)^{1/3}$.

Para aplicar el criterio del teorema 15.5.3 calculamos las derivadas segundas en el punto $((18)^{1/3}, (18)^{1/3})$,

$$f_{xx} = 144/x^3; \quad f_{yy} = 144/y^3; \quad f_{xy} = 4,$$

luego

$$A = 144/18 = 8 > 0; \quad C = 144/18 = 8; \quad B = 4; \quad D = B^2 - AC = -48 < 0.$$

Por consiguiente, f tiene un mínimo local en $((18)^{1/3}, (18)^{1/3})$.

Como $\lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to +\infty} f(x, y) = \lim_{y\to +\infty} f(x, y) = +\infty$, existe el mínimo absoluto de f, y se alcanza en $x = y = (18)^{1/3}$.

La solución es $x = y = (18)^{1/3}$, $z = 12/(xy) = 2^{4/3} \times 3^{-1/3}$.

Observaciones tras corregir los exámenes:

- No se puede suponer desde el comienzo que $x = y$ sin aportar ninguna justificación.
- No es correcto resolver el problema a base de considerar la expresión $g(x, y, z) = 4xy + 3(2xz + 2yz)$ como una función de tres variables $(0, +\infty)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e imponer la condición de que su gradiente $\nabla g(x, y, z)$ sea nulo.

  Puede considerarse como un problema de una función g de tres variables, pero lo que no es correcto es suponer que el extremo que buscamos ha de hacer nulo el gradiente de g. Esto se debe a que el dominio en el que buscaríamos el extremo no sería todo $(0, +\infty)^3$, sino solamente su subconjunto formado por los puntos para los que $xyz = 12$. Este subconjunto no tiene puntos interiores, por lo que no sería aplicable un resultado análogo al teorema 15.5.2 en tres variables. Habría que utilizar un resultado diferente, del tipo del (15.6.2).

6. Aplicaremos la fórmula (6.2.1), así como su fórmula dual al cambiar x por y.

   a) $A(x)$ es el área del cuadrado de base $4 - x^2$, es decir, $A(x) = (4 - x^2)^2 = 16 - 8x^2 + x^4$. Luego el volumen pedido es igual a $\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)dx = 512/15$.

   b) $A(y)$ es la mitad de área del círculo de radio $\sqrt{y}$, es decir, $A(y) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{y})^2 = \pi y/2$. Luego el volumen del segundo sólido es igual a $\int_0^4 (\pi y/2)\, dy = 4\pi$.

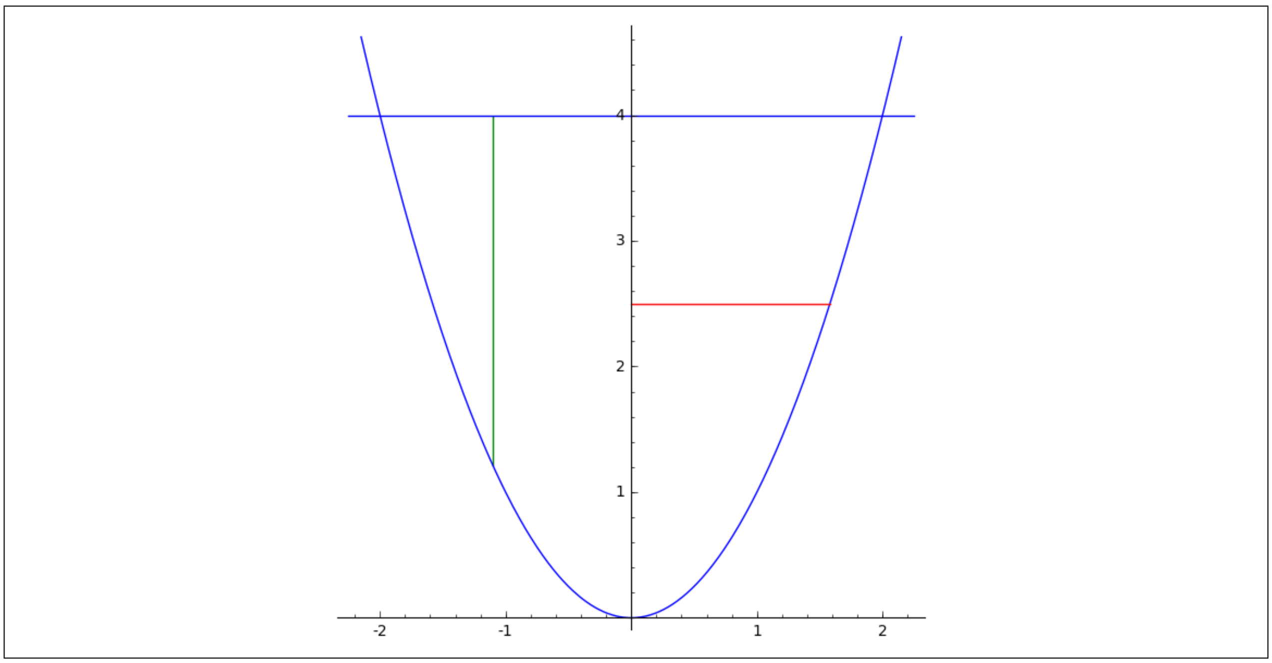

Figura 2: Base común de los dos sólidos del problema 6 (contorno en azul). El primer sólido está formado por cuadrados de lado como el segmento verde, que mide $4-x^2$ (con x variando entre -2 y 2). El segundo sólido está formado por semicírculos de radio como el segmento rojo, que mide $\sqrt{y}$ (con y variando entre 0 y 4).

Observaciones tras corregir los exámenes:

- Un fallo frecuente ha sido integrar $4 - x^2$ en lugar de $(4 - x^2)^2$, con lo que se ha obtenido el área de la base, que ni se pedía ni ayudaba a encontrar una solución.
- Otro fallo recurrente ha sido el cálculo erróneo de una antiderivada de la función $(4 - x^2)^2$. No es cierto que $\int(4 - x^2)^2\, dx$ sea igual a $(4 - x^2)^3/3$.