ESTALMAT CANTABRIA
2010 - 2011

Mirar y ver: Demostraciones Visuales

Elena Álvarez Saiz

"Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo".

"Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo".

"Las ideas básicas del análisis elemental, orden, distancia, operaciones con números, nacen de situaciones bien concretas y visuales".

Miguel de Guzmán

¿Qué vamos a hacer?

La Matemática es una ciencia y una herramienta pero también es un arte y un juego. En este sentido las demostraciones visuales pueden aglutinar todas estas interpretaciones de la Matemática al presentarse como actividades creativas y de investigación de los alumnos impulsando el espíritu de exploración e investigación que proponen los nuevos métodos educativos.

En esta sesión nos dedicaremos a realizar demostraciones geométricas y algebraicas asignando un apartado especial al Teorema de Pitágoras.
Los objetivos que nos proponemos son:

- hacer del razonamiento visual una práctica aceptable y habitual para el aprendizaje
- fomentar la exploración y el querer averiguar por sí mismo
- estimular la imaginación.

Actividad 1.1 ¿Qué significa "demostrar"?

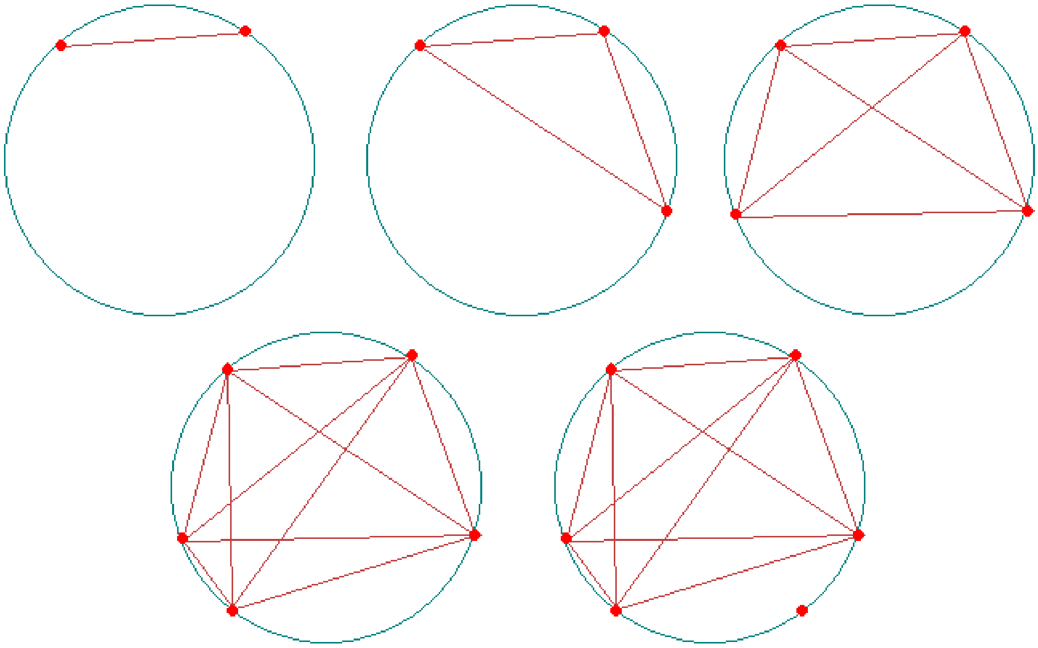
Escribe aquí lo que tú piensas que es demostrar:

Actividad 1.2. ¿Es necesario "demostrar"?

Por supuesto, a veces las apariencias engañan. Fíjate en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
Escoge x puntos sobre una circunferencia de manera que al dibujar todas las cuerdas que unan estos x puntos no haya 3 cuerdas concurrentes en un punto distinto de los elegidos en la circunferencia. Observa qué pasa si contamos el número de regiones que quedan dentro de una circunferencia:

- Con un punto queda una sola región
- Con 2 puntos quedan 2 regiones
- Con 3 puntos quedan 4 regiones
- Con 4 puntos quedan 8 regiones
- Con 5 puntos quedan 16 regiones
- ¿Cuántas regiones crees que aparecerán si situamos 6 puntos sobre una circunferencia?



Ejemplo 2:
Observa la siguiente serie:

31 es primo
331 es primo
3331 es primo
33331 es primo
333331 es primo
3333331 es primo
33333331 es primo
¿Cómo crees que será 333333331?

Nota: Puedes visitar el enlace: http://www.rodoval.com/java/Factores.html

Observa que las intuiciones no demostradas no sirven para nada, es más pueden hacer que nos equivoquemos.

Actividad 1.3 Demostraciones visuales

En Matemáticas hay muchos métodos para demostrar resultados. Nosotros vamos a ver en esta sesión las demostraciones visuales.

Ejemplo 3: Fíjate en la siguiente serie:

1=
1-3+5=

1-3+5-7+9=
1-3+5-7+9-11+13=
…
1-3+5-7+9…………………………………..+ 29=

COMPLETAR

Observa que el último término de cada suma es de la forma $4\cdot\boxed{k}+1$:

Para la primera igualdad en $\boxed{k}$ iría el número __________

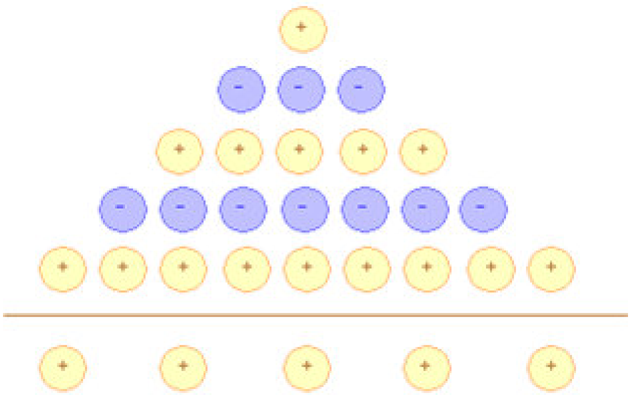
Para la segunda igualdad en $\boxed{k}$ iría el número __________

………………………………………………………………………

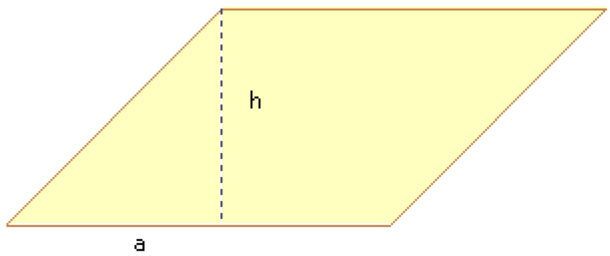
Establece una relación entre el valor de $\boxed{k}$ en cada caso y el valor de la suma correspondiente y conjetura el valor de:

1-3+5-7+9- ………………………………..+ (4k+1)=

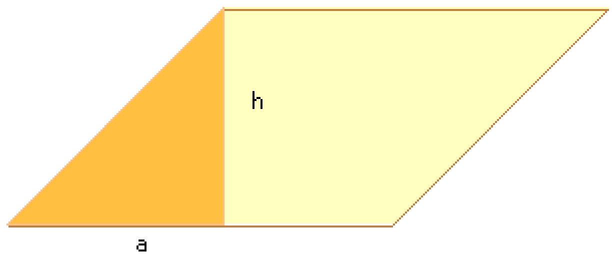
Observa la figura siguiente, supone una prueba visual de lo dicho anteriormente.



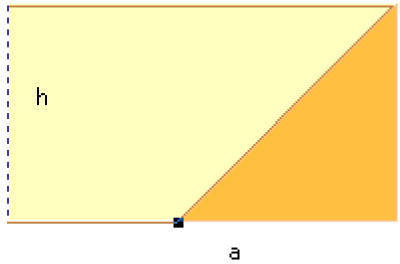
Ejemplo 4: ¿Cuál será el área de la siguiente figura?



Paso 1:



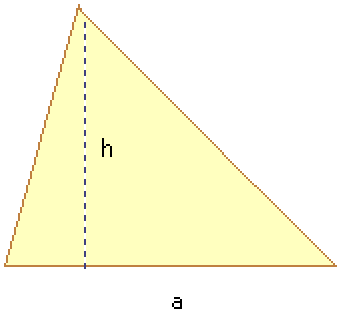
Paso 2:



Resultado: $\boxed{A = a \cdot h}$

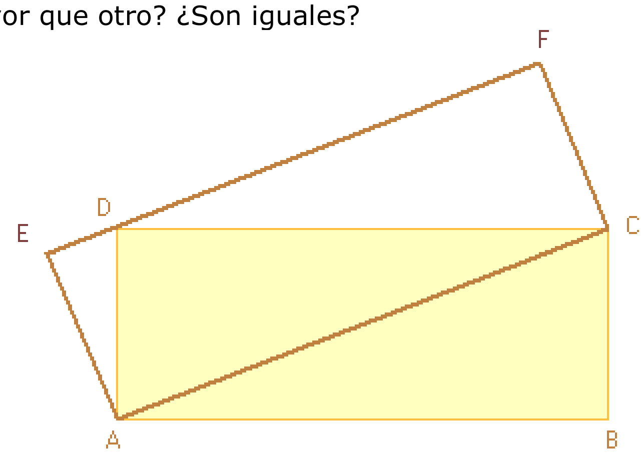
Actividad 1.4. Yo quiero intentarlo, ¿puedo?

Ejemplo 5. ¿Cuál será el área de la siguiente figura?



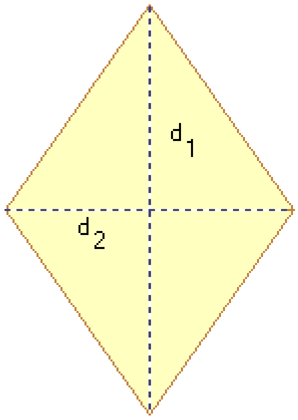
Respuesta:

Ejemplo 6. ¿Cuál es la relación entre el área del rectángulo ACFE y la del rectángulo ABCD? ¿Hay uno mayor que otro? ¿Son iguales?



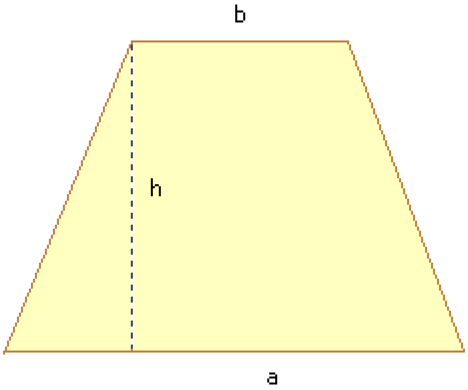
Pista: Para el área del rectángulo ACFE puedes trazar la perpendicular desde D hasta AC. Para el del rectángulo ABCD puedes dividirlo en dos triángulos.
Respuesta:

Ejemplo 7. ¿Cuál será el área de la siguiente figura?



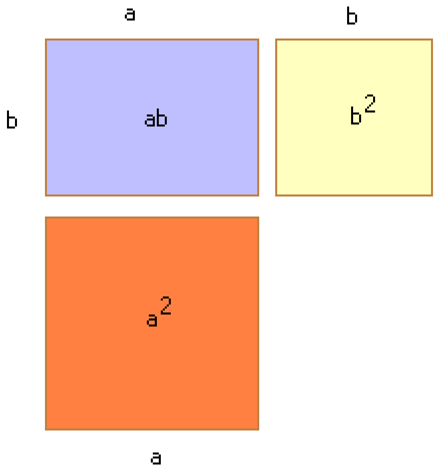
Respuesta:

Ejemplo 8. ¿Cuál será el área de la siguiente figura?



Respuesta:

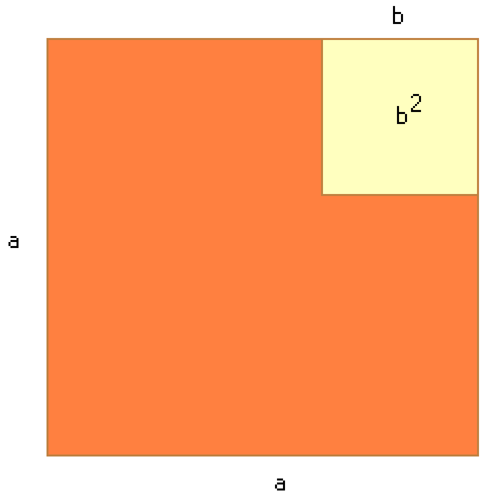
Ejemplo 9. Considera las siguientes figuras:



- ¿Cuál es la representación del cuadrado de la suma de a y b, es decir, $(a+b)^2$?
- ¿Y la suma del cuadrado de a y el cuadrado de b, es decir, a^2+b^2 ?
- ¿En qué se diferencia el cuadrado de la suma de la suma de cuadrados?.

Respuesta:

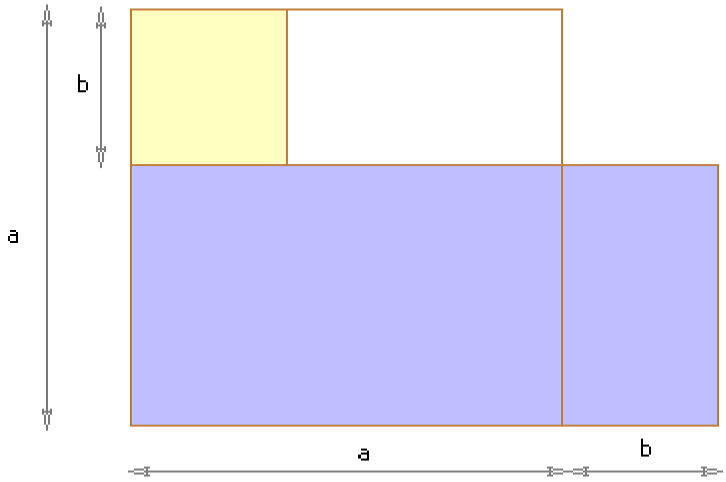
Ejemplo 10. Considera la siguiente figura:



- ¿Cuál es la representación del "cuadrado de la diferencia" de los números a y b, es decir, $(a-b)^2$?
- ¿En cuánto se diferencian el cuadrado de la diferencia y el cuadrado de a?
- ¿Cuánto es pues el cuadrado de la resta de dos números?

Respuesta:

Ejemplo 11. Considera la siguiente figura:



- ¿Cuál es la relación entre las dimensiones del rectángulo azul y los números a y b?

- ¿A qué será igual el producto de la suma por la diferencia de dos números?

RRespuesta:

Aplicación: Cálculos rápidos

Vamos a aplicar las igualdades obtenidas en los ejemplos 9, 10 y 11 para calcular rápidamente algunos productos. Te recuerdo lo que hemos obtenido:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$$

Por ejemplo consideremos:

$$52^2 = (50+2)^2 = \ldots$$

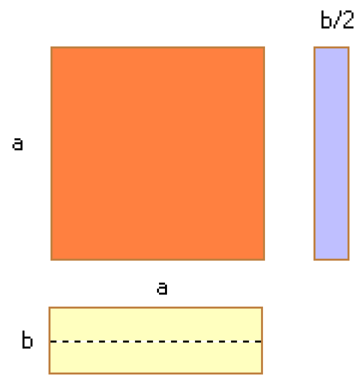
$$58\cdot 62 = (60+2)\cdot(60-2) = \ldots$$

Piensa en un número cualquiera que acabe el 5, vamos a llamar a ese número por ejemplo a. Observa que fácil es calcular su cuadrado teniendo en cuenta que

$$(a+5)\cdot(a-5) = a^2 - 25$$

Puedes plantear tú algunos cálculos que puedan hacerse rápidamente con las igualdades vistas en los ejemplos anteriores.

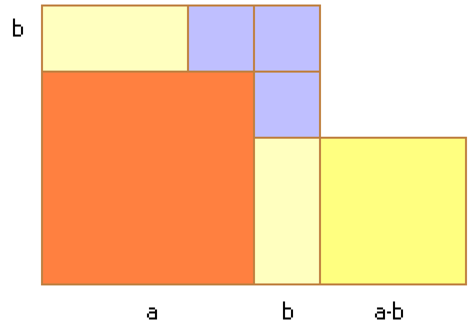
Ejemplo 12. ¿Por qué $a^2+ab=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$



- ¿Cuál es la representación de a^2+ab?
- ¿Y de $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2$?
- ¿Qué relación existe entre ambas expresiones?

Respuesta:

Ejemplo 13. Considera la siguiente figura:



- ¿Cuál es la representación del cuadrado de la suma de a+b, es decir, $(a+b)^2$?
- ¿Y el cuadrado de la diferencia a-b, es decir, $(a-b)^2$?
- ¿Qué relación hay entre $(a+b)^2-(a-b)^2$ con la suma de los cuadrados de a y de b, es decir, a^2+b^2?

Respuesta:

Ejemplo 14. Fíjate en la siguiente serie:

1=
1+2=
1+2+3=
1+2+3+4=
…
1+2+3+…+n =

Intenta encontrar una demostración visual que permita calcular la suma de los primeros n números naturales.

Respuesta:

Ejemplo 15. Otras igualdades:

1=
1+3=
1+3+5=
1+3+5+7=
…
1+3+5+..............+21=

$$1+3+5+...+(2n-1)=\boxed{}$$

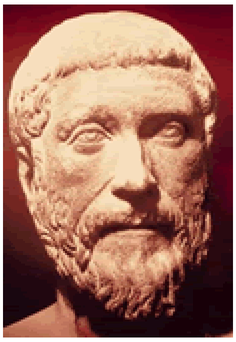
Respuesta:

1=
1+2+1=
1+2+3+2+1=
1+2+3+4+3+2+1=
…
1+2+3+...................+9+10+9+...............+3+2+1=

$$1+2+3+...+n+...+3+2+1=\boxed{}$$

Respuesta:

Actividad 2.1. ¿Quién fue Pitágoras? ¿Y los pitagóricos?



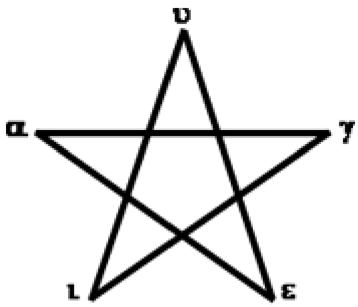
Pitágoras es quizás el matemático más popular.

Era originario de la isla de Samos, situado en el Mar Egeo. En la época de este filósofo la isla era gobernada por el tirano Polícrates. Como el espíritu libre de Pitágoras no podía avenirse a esta forma de gobierno, emigró hacia el occidente, fundando en Crotona (al sur de Italia) una asociación que no tenía el carácter de una escuela filosófica sino el de una comunidad religiosa.

Por este motivo, puede decirse que las ciencias matemáticas han nacido en el mundo griego de una corporación de carácter religioso y moral. Ellos se reunían para efectuar ciertas ceremonias, para ayudarse mutuamente y para vivir en comunidad.

En la Escuela Pitagórica podía ingresar cualquier persona, ¡hasta mujeres!. En esa época, y durante mucho tiempo, las mujeres no eran admitidas en la escuelas.

El símbolo de la Escuela de Pitágoras y por medio del cual se reconocían entre sí, era el pentágono estrellado, que ellos llamaban *pentalfa*[1] (cinco alfas).



Debido a la influencia política que tuvo la Escuela en esa época, influencia que era contraria a las ideas democráticas existentes, se produjo, tal vez, después del año 500 una revuelta contra ellos, siendo maltratados e incendiadas sus casas. Pitágoras se vio obligado a huir a Tarento, situada al sur de Italia. Algunos piensan que un año más tarde murió asesinado en otra revuelta popular en Metaponto.

Se debe a Pitágoras el carácter esencialmente deductivo de la Geometría y el encadenamiento lógico de sus proposiciones, cualidades que conservan hasta nuestros días.

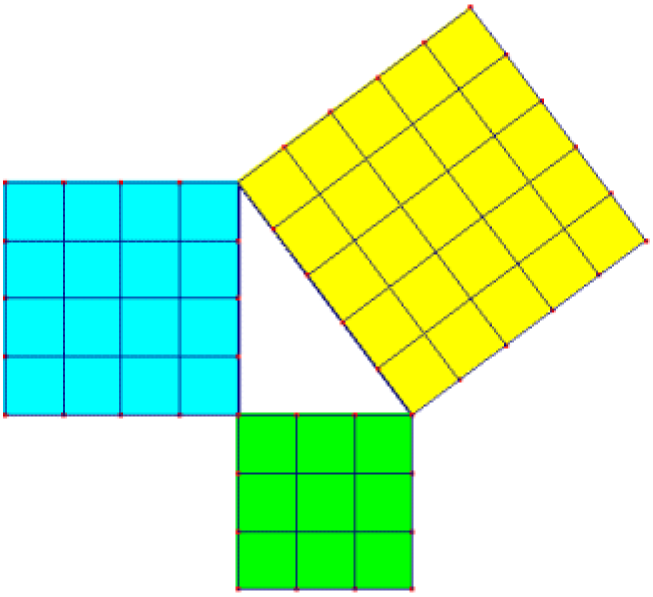
La base de su filosofía fue la ciencia de los números, y es así como llegó a atribuirles propiedades físicas a las cantidades y magnitudes. Es así como el número cinco era el símbolo de color; la pirámide, el del fuego; un sólido simbolizaba la tetrada, es decir, los cuatro elementos esenciales: tierra, aire, agua y fuego.

[1] Una de las curiosas propiedades del *Pentagrama,* que imponía respeto a los pitagóricos era su «*unicursalidad*»: «*la estrella pentagonal puede ser trazada por el movimiento de un punto sin pasar dos veces por el mismo lado*».

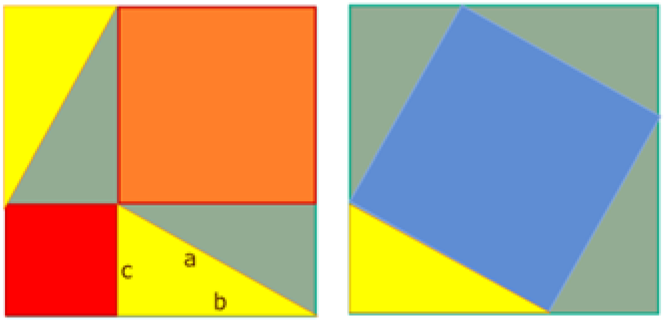
Actividad 2.2 ¿Qué dice su teorema[2]?

En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

La figura representa una de las situaciones más sencillas, en la que se puede comprobar su veracidad sin más que contar cuadrados.

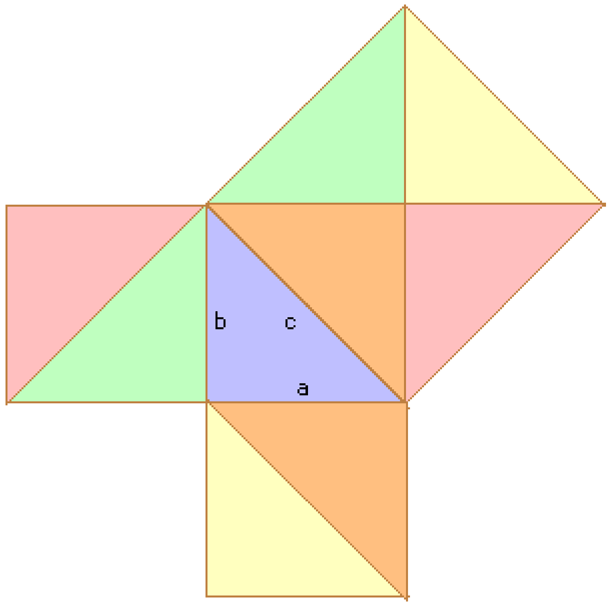


Una de las demostraciones más conocidas es la que se muestra a continuación y que se suele atribuir al propio Pitágoras:



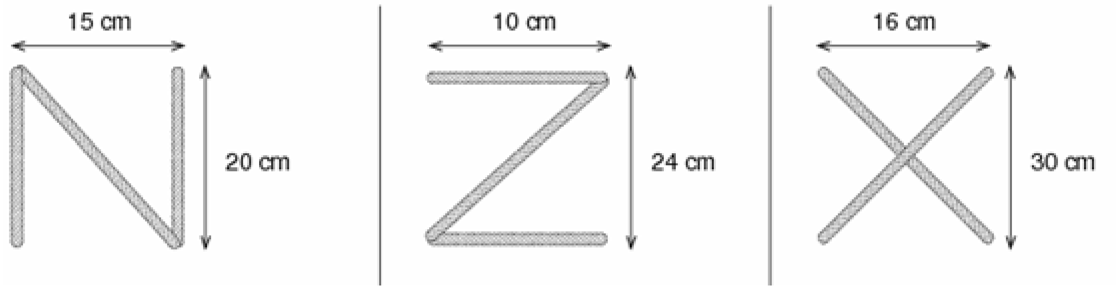
La relación que expresa el teorema de Pitágoras es especialmente intuitiva si se aplica a un triángulo rectángulo e isósceles. Este problema lo trata Platón en sus famosos diálogos.

[2] Los descubrimientos arqueológicos de los restos de las culturas de Mesopotamia, Egipto, India y China, han revelado que estas civilizaciones conocían aspectos del *Teorema de Pitágoras* muchos siglos antes que este sabio



Actividad 2.3 ¿Se puede jugar con él?

Ejemplo 16. Calcula los centímetros de cuerda que se necesitan para formas las letras N, Z y X de las siguientes dimensiones

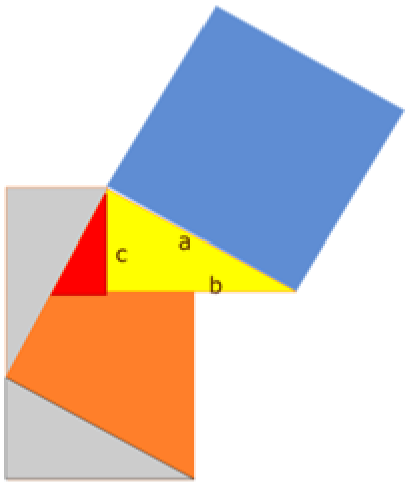


Se necesita: cm Se necesita: cm Se necesita: cm

Ejemplo 17. Puzzle. Thabit Ibn Qurra (826-901)

Nacido en Turquia, Thabit Ibn Qurra fue un gran matemático y astrónomo.

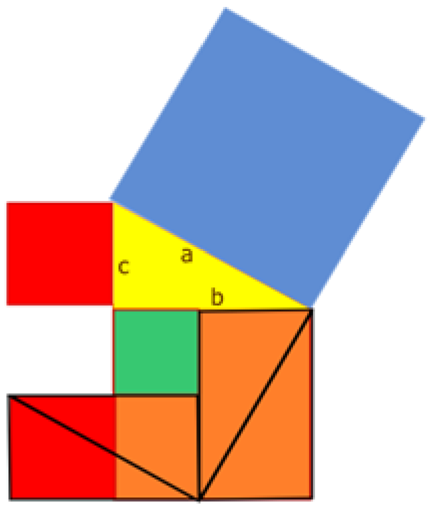
Considera los dos cuadrados de lados b y c colocados juntos que rellena con tres piezas: dos triángulos idénticos a R y un polígono de cinco lados que es la pieza restante. Estas tres piezas completan el cuadrado de lado a.



Ejemplo 18. Puzzle. Bhâskara (114-1185)

Bhâskara fue un monje y astrónomo hindú. Su demostración aparece en el Vijaganita (Cálculo de raíces).

Realiza una partición en cinco piezas del cuadrado de lado a mediante cuatro triángulos rectángulos iguales al inicial, T, y un cuadrado de lado (b-c). Estas piezas rellenan también los dos cuadrados de lados b y c.

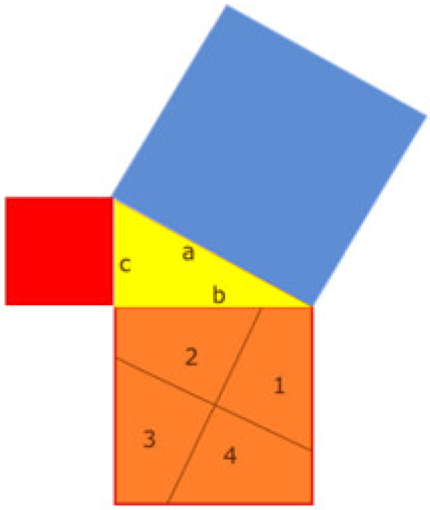


Ejemplo 19. Puzzle pitagórico de Perigal

Perigal fue un agente de bolsa y un astrónomo aficionado. Su demostración fue publicada en su artículo "On geometric dissections and transformations" (Sobre las disecciones y transformaciones geométricas. Messenger of Mathematics, vol. 1, 1874, pp. 103-105). Perigal hizo imprimir el anagrama con las figuras de la demostración en su tarjeta de visita.

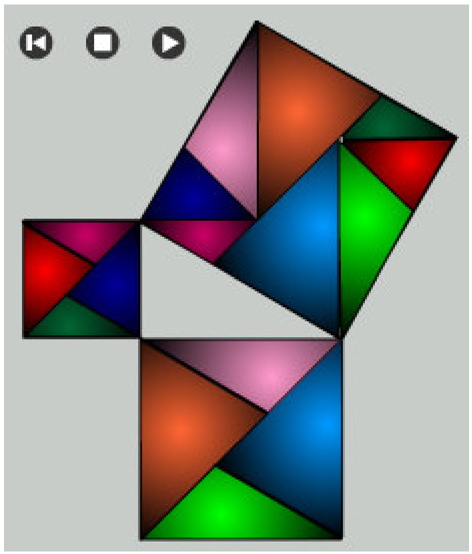
Se hace una partición del cuadrado sobre el mayor de los catetos en 4 piezas iguales. Se trazan dos segmentos por el centro del cuadrado siendo uno paralelo a la hipotenusa y el otro perpendicular a él.

Estas cuatro piezas y el cuadrado de lado c rellenan el cuadrado de lado a.



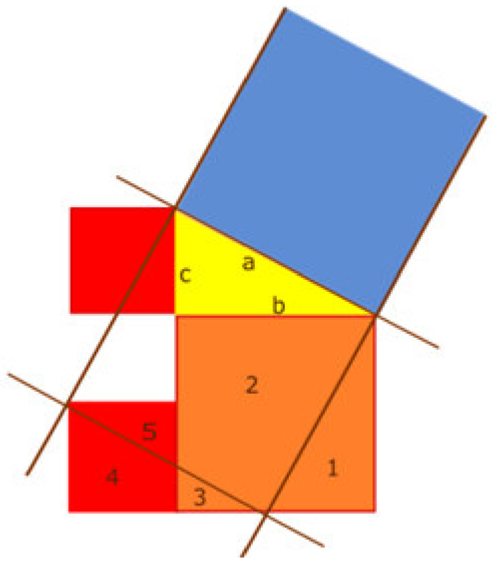
Solución:

También puedes ver el siguiente rompecabezas de 8 piezas (http://www.iessandoval.net/sandoval/aplica/activi_mate/actividades/pitagoras/marco_pitagoras6.htm)



Ejemplo 20. Puzzle pitagórico de Ozanam (1813-1853)

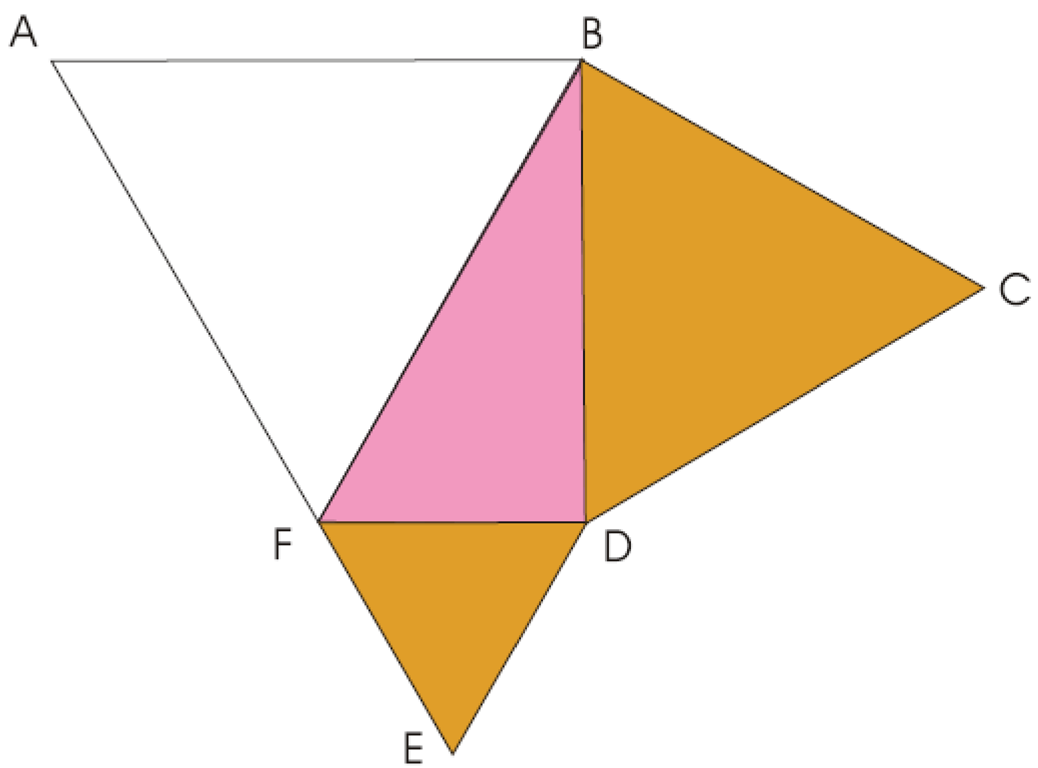
Se consideran los dos cuadrados construidos sobre los catetos. Al lado del cuadrado de lado b se coloca el de lado c y se traza un segmento paralelo a la hipotenusa y uno perpendicular a la misma que dividen a estos dos cuadrados en cinco piezas. Estas cinco piezas permiten rellenar el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

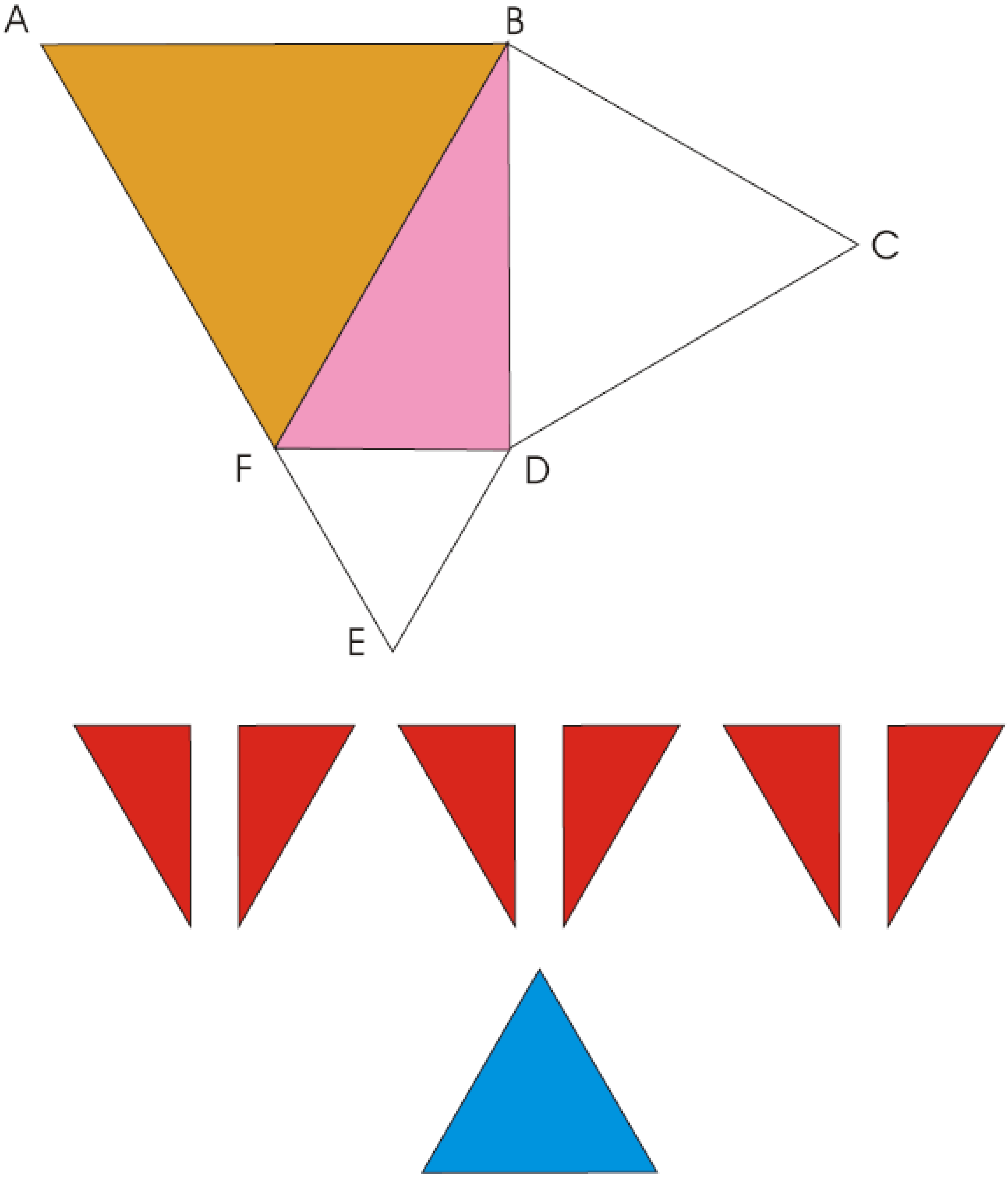


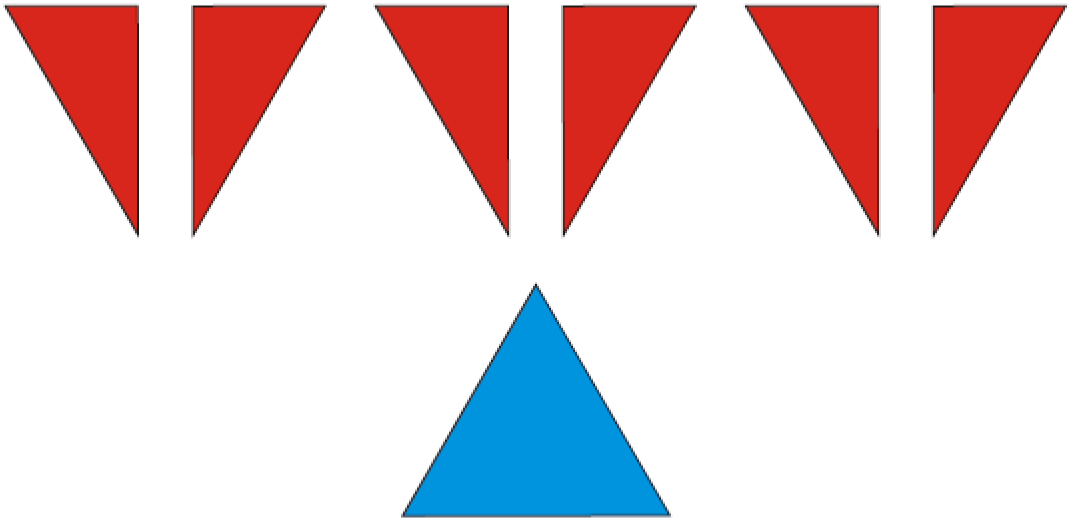
Ejemplo 21. Se puede demostrar que la propiedad pitagórica es válida para cualquier figura construida sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que *las tres figuras sean semejantes entre sí*, dado que las relaciones de superficie de figuras semejantes dependen del cuadrado de uno de sus lados.

De este modo, para el triángulo equilátero, que es el caso que nos ocupa, podremos enunciar el teorema diciendo que *la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos es igual al área del triángulo equilátero que tiene por lado la hipotenusa.*

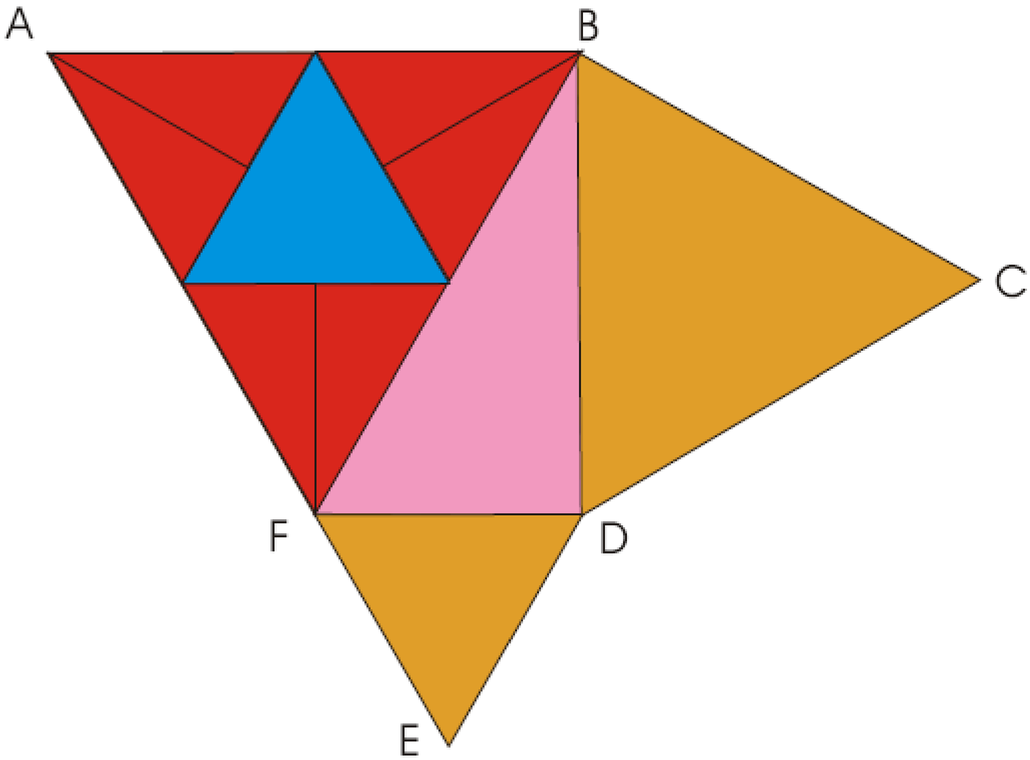
Demostrarás esto usando para ello el presente puzzle pitagórico

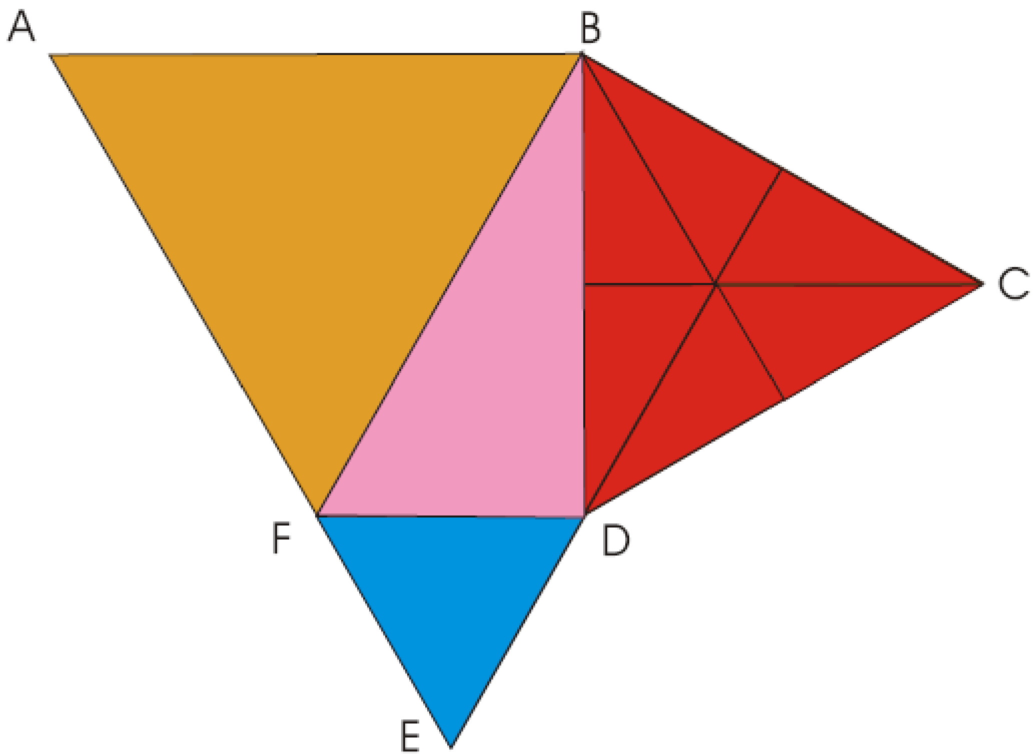



A
B
C
F
D
E



Solución:

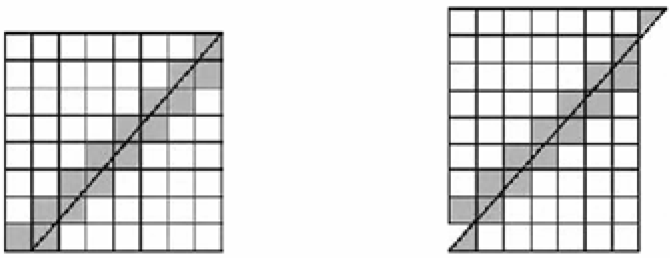




PARA PENSAR:

- **"Demostremos" que 15=14**

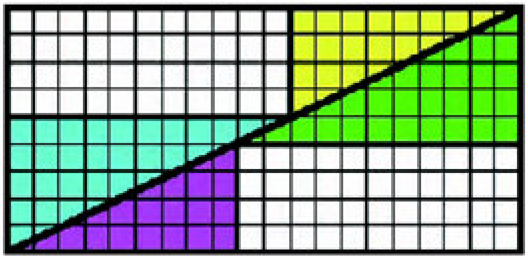
En el tablero 8x8 de la izquierda se sombrean los 15 cuadros indicados. Si se recorta por la diagonal marcada y se desplaza hacia arriba la mitad superior como se ilustra en la figura de la derecha el número de cuadros sombreados es ahora 14 (que son trece cuadrados completos y los dos de los extremos incompletos).



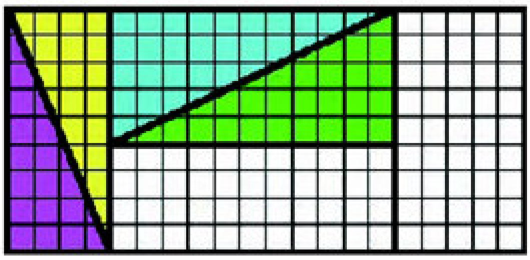
¿Qué explicación podrías dar?

- **"Demostremos" que 88=89**

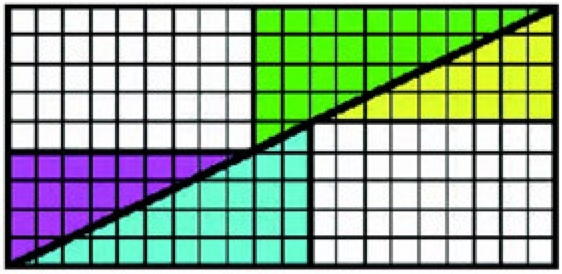
Las figuras que mostramos a continuación, debidas al profesor de la Universidad de Harvard Noam Elkies, corresponden a un rectángulo externo de dimensiones 20x9 del cual se pueden recortar cuatro triángulos y disponerlos de cuatro formas diferentes para que las regiones sobrantes tengan distintas áreas.



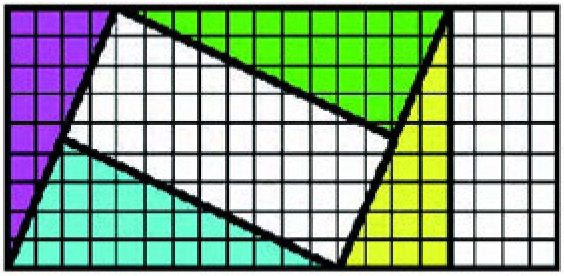
44+44=88



44+45=89



45+45=90



36+55=91

¿Qué explicación podrías dar?

- **La desaparición de las palomas**

Recorta la figura A, en la que aparecen nueve palomas volando. Obtendrás las tres piezas de la figura B. Intercambia las dos piezas superiores y conseguirás la última imagen. Si ahora cuentas las palomas verás que hay diez, ¿de dónde salió la décima?

¿Qué explicación podrías dar?

BIBLIOGRAFÍA:

- El apartado 2.1 está tomado literalmente de:

  http://www.unex.es/~fan/cuantica/mc%2010/Web/Tales/pita.html

- Puedes obtener más información del Teorema de Pitágoras en:
  - La WebQuest de Manuel Sada Allo http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/wq/
  - http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm

- Puzzles pitagóricos para recortar:
  - Ejemplo 17: Thabit Ibn Qurra http://web.educastur.princast.es/ies/turon/matematicas/enlaces/puzzle3.pdf
  - Ejemplo 19: Disección de Perigal http://web.educastur.princast.es/ies/turon/matematicas/enlaces/puzzle2.pdf
  - Ejemplo 20: Puzzle de Ozanan http://web.educastur.princast.es/ies/turon/matematicas/enlaces/puzzle4.pdf
  - Ejemplo 21: Generalización http://web.educastur.princast.es/ies/turon/matematicas/enlaces/puzzle5.pdf
- Otras demostraciones dinámicas del teorema:
  - http://www.dmae.upct.es/~pepemar/triangulo/pitagoras.html
  - http://www.iessandoval.net/sandoval/aplica/activi_mate/actividades/pitagoras/marco_pitagoras6.htm