Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

Tiempo (2 horas)

Cuestión 1) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Un sólido H está formado por todos los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que están dentro del cono $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ y que además verifican $1\le x^2+y^2+z^2\le 9$. El volumen de este sólido es

A) Volumen $=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^3 \rho\cdot d\rho\, d\phi\, d\theta=\frac{8}{3}\pi^2$

B) Volumen $=\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_1^3 \rho\cdot d\rho\, d\phi\, d\theta=\frac{4}{3}\pi^2$

C) Volumen $=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\cdot d\rho\, d\phi\, d\theta=\frac{26}{3}\pi$

D) Ninguna de las anteriores. (6 puntos)

Cuestión 2)

Sea C un alambre que tiene la forma de un arco de la curva denominada cicloide, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$C\equiv\left(a(t-\operatorname{sen}t),a(1-\cos t),0\right)\ \ t\in[0,\,2\pi]$$

Si la densidad de masa en cada punto del alambre viene dada por la función $\delta(x,y)=\sqrt{y}$, la masa del alambre C vale

A) Masa $=8a$

B) Masa $=2\pi a\sqrt{2}$

C) Masa $=2\pi a\sqrt{2a}$

D) Ninguna de las anteriores. (7 puntos)

Cuestión 3)

Sea C la curva formada por los cuatro lados del cuadrado unitario del primer octante, situado en el plano $z=1$; es decir que los vértices del cuadrado C son los puntos $(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\ y\ (0,0,1)$, recorrido en sentido antihorario visto desde arriba. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}=(0,x,-z^2)$. El valor de la integral $\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$ es

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) Ninguna de las anteriores. (7 puntos)

Ejercicio 1.- (a) 13 puntos ; b) 10 puntos)

a) Dadas las curvas expresadas en polares por las ecuaciones: $r_1=16\operatorname{sen}\theta$; $r_2=8$. Se pide:

i. Determina las coordenadas polares de los puntos de intersección de ambas curvas.

ii. Dibuja ambas curvas en el primer cuadrante.

iii. Calcula el área de la región D que está en el primer cuadrante, exterior a la curva $r_2=8$ e interior a la curva $r_1=16\operatorname{sen}\theta$.

b) Utiliza el teorema de la divergencia de Gauss para calcular $I=\iint_{\partial H}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x+z^2)\mathbf{i}+(y-z^2)\mathbf{j}+x\mathbf{k}\ ;\ H \text{ es el sólido } 0\le y^2+z^2\le 1,\ 0\le x\le 2$$

Ejercicio 2.- (15 puntos)

Calcula la integral de línea $I = \int_{AB} \left(y^2 z + y e^{xy}\right) dx + \left(2xyz + x e^{xy}\right) dy + \left(xy^2 + 3z^2\right) dz$, a lo largo de la curva de ecuaciones paramétricas: $AB \equiv \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2(t) \cdot \mathbf{i} + \cos(t) \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k}$, desde el punto $A(t = 0)$ hasta el punto $B\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicio 3.- (12 puntos)

Utiliza el teorema de Stokes para calcular el flujo de $rot\,\mathbf{F}$ que sale de la cara exterior de la superficie de la semiesfera de centro el origen de coordenadas y radio 1, con $z \geq 0$, siendo

$$\mathbf{F} = (y - 2x) \cdot \mathbf{i} + yz^2 \cdot \mathbf{j} - y^2 z \cdot \mathbf{k}$$

Cuestión adicional para obtener 5 puntos extra:

Si D es una región del plano, acotada por una curva C simple, cerrada y suave por partes. Se consideran las dos afirmaciones siguientes:

1) área de $D = \oint_C -x\,dy$
2) área de $D = \oint_C -y\,dx$

Justifica cuál de las siguientes respuestas es la verdadera:

A) La afirmación 1) es cierta pero la 2) no lo es.
B) La afirmación 2) es cierta pero la 1) no lo es.
C) Las dos expresiones para obtener el área de D son ciertas.
D) No se puede calcular el área de D mediante una integral de línea. (5 puntos)

Cálculo II Examen Final del Bloque 1 10 de Junio de 2017

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

Teoría y Ejercicios **Tiempo (1 hora 50 min.)**

Cuestión 1) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

El área del recinto plano R limitado por las curvas de ecuaciones: $xy = 2$, $x + y = 3$, vale

A) área de $R = \dfrac{15}{2} - 8\log 2$

B) área de $R = 4\log 4 - \dfrac{15}{2}$

C) área de $R = 7 - 8\log 2$

D) ninguna de las anteriores. (7 puntos)

Cuestión 2) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = y \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j}$, se verifica:

A) las líneas equipotenciales del campo $\mathbf{F}$ son la família de curvas $x^2 - y^2 = C$

B) no tiene sentido hablar de las líneas equipotenciales del campo $\mathbf{F}$ porque no existen

C) las líneas equipotenciales del campo $\mathbf{F}$ son la família de curvas $x \cdot y = C$

D) ninguna de las anteriores. (4 puntos)

Cuestión 3) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Sea la superficie del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. El área del trozo S de dicho cono que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, vale

A) área de $S = \pi$

B) área de $S = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$

C) área de $S = \sqrt{2}\,\pi$

D) ninguna de las anteriores. (9 puntos)

Ejercicio 1.- (15 puntos)

Determina el área de la región plana contenida en el primer cuadrante, exterior a la cardioide $r = 2 + 2\cos\theta$ e interior a la circunferencia $r = 6\cos\theta$. Haz un dibujo sencillo de la región anterior.

Ejercicio 2.- (15 puntos)

Utilizando obligatoriamente el teorema de Green en el plano, evalúa la integral

$$I = \oint_{ABCA} (y - \operatorname{sen} x)\,dx + \cos x\,dy,$$

Siendo la línea cerrada $ABCA$ el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $C\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

Ejercicio 3.- (a) 15 puntos; b) 20 puntos)

a) Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = 2x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z^2 \cdot \mathbf{k}$. Determina el flujo del campo $\mathbf{F}$ que sale a través de todas las caras del sólido V definido como

$$V = \left\{ \left(x, y, z\right) / \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \;, \quad z \geq 0 \right\}$$

b) Sea S el trozo de la superficie del elipsoide $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ que está por encima del plano $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Utiliza obligatoriamente el teorema de Stokes para calcular

$$I = \iint_S \left(\mathbf{rotE}\right) \bullet \mathbf{n} \, dS$$

siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario dirigido hacia fuera del elipsoide y el campo vectorial $\mathbf{E} = -3y \cdot \mathbf{i} + 3x \cdot \mathbf{j} + z^4 \cdot \mathbf{k}$.

Cuestiones para resolver con código Matlab **Tiempo (25 minutos)**

Pregunta 1) (8 puntos)

a) Crea una función Matlab, denominada **sumaRiemann3**, que aproxime el valor de la integral triple $I=\int_h^j\int_c^d\int_a^b (x+z)\cdot e^{\cos(x)}dxdydz$, sobre una caja $[a,b]\times[c,d]\times[h,j]$. La función anterior debe utilizar las sumas de Riemann en los puntos medios de cada coordenada y dependerá de los parámetros siguientes: **a**, **b**, **c**, **d, h, j, m, n** y **p**; siendo **m, n** y **p** los subintervalos tomados en los ejes OX, OY y OZ, respectivamente.

b) Escribe abajo el código Matlab que desde la ventana de comandos permite ejecutar la función **sumaRiemann3** para aproximar la integral

$$I=\int_0^2\int_0^2\int_{-1}^1 (x+z)\cdot e^{\cos(x)}dxdydz$$

Toma una partición de 30 subintervalos en cada eje.

c) Calcula también el valor exacto de la integral I anterior, así como el error cometido en la aproximación del apartado b), en valor absoluto.

Solución:

b) En la ventana de comandos se escribe:

>>

Pregunta 2) (7 puntos)

a) Utiliza código Matlab para dibujar un alambre que tiene la forma de la curva *C*, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = 4\cos t \ , \ y(t) = 9\,\mathrm{sen}\, t \ , \ z(t) = 4t \ , \qquad t \in \left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$$

b) Calcula a mano el valor del elemento diferencial de longitud del arco de la curva anterior, *ds*. Escribe el código Matlab que permita obtener la longitud de dicha curva, planteando previamente a mano la integral correspondiente.

c) Sea el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = x^2 \cdot \mathbf{i} + (x + y) \cdot \mathbf{j} - \mathbf{k}$ que actúa sobre la curva *C.* Sobre la curva C, en 10 puntos equidistantes, dibuja una muestra de los vectores del campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z)$, en color rojo. Pon un título a la gráfica.

Solución:

Cálculo II — Examen Final del Bloque 2 — 10 de Junio de 2017

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

Teoría y Ejercicios **Tiempo (1 hora 50 min.)**

Cuestión 1) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Dada la ecuación diferencial $y' = y^{1/3}$, se verifica:

A) la família uniparamétrica de curvas $y = (x + C)^{3/2}$ es la solución general de dicha ecuación diferencial.

B) la solución única del p. v. i. $\{ y' = y^{1/3} \quad , \quad y(0) = 0 \}$ es $y(x) = 0$.

C) la solución única del p. v. i. $\{ y' = y^{1/3} \quad , \quad y(0) = 0 \}$ es $y(x) = \left(\frac{2}{3} x \right)^{3/2}$.

D) ninguna de las anteriores. (9 puntos)

Cuestión 2) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Se considera la ecuación diferencial $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$. Justifica cuál de los conjuntos $\{ y_1(x),\ y_2(x) \}$ es un sistema de soluciones de dicha ecuación, linealmente independientes en el intervalo $(0,1)$:

A) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$.

B) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$.

C) $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = e^x$.

D) ninguna de las anteriores. (8 puntos)

Cuestión 3) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Dada la ecuación diferencial $y'' + y = 2\cos x - \operatorname{sen} 3x$, podemos afirmar que una solución particular de la ecuación completa es de la forma:

A) $y_p(x) = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x + C\cos 3x + D\operatorname{sen} 3x$.

B) $y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x + C\cos 3x + D\operatorname{sen} 3x$.

C) $y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} 3x$.

D) ninguna de las anteriores. (6 puntos)

Ejercicio 1.- (14 puntos)

a) Resolver la ecuación diferencial siguiente: $(x^2 - 2y^2)dx + xy\,dy = 0$

b) Estudiar si la ecuación diferencial anterior tiene alguna solución singular.

Ejercicio 2.- (18 puntos)

Un plasma sanguíneo está almacenado a 40ºC. Antes de que se pueda usar, debe elevarse a la temperatura de 90ºC. Si el plasma se coloca en un horno que se encuentra a 120ºC, transcurren 49 minutos antes de que la temperatura del plasma se eleve a 90ºC. Aplicando la ley del enfriamiento de Newton, según la cual la temperatura de un cuerpo cambia proporcionalmente (*K* es la constante de proporcionalidad o constante de enfriamiento del horno) a la diferencia entre su temperatura *T* y la del medio T_M en que se encuentra, se pide:

a) El valor de la constante *K*, que sólo depende de la temperatura del horno.

b) El tiempo que debería transcurrir para que la temperatura del plasma se elevase a 90ºC si la temperatura inicial del plasma fuese de 30ºC y la temperatura del horno de 120ºC.

Ejercicio 3.- (30 puntos)

Halla la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal completa para $x > 0$

$$x^4 y'' - 6x^2 y = 1 - 6x^2$$

sabiendo que la función $y_1(x) = x^3$ es solución de la ecuación homogénea $x^4 y'' - 6x^2 y = 0$.

Cuestiones para resolver con código Matlab **Tiempo (25 minutos)**

Pregunta 1) (2 puntos)

Utiliza código Matlab para hallar la solución particular de la ecuación diferencial $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+2x\,y=\dfrac{x}{1+x^2}$ que pasa por el punto $P(2,-1)$.

Solución:

\>>

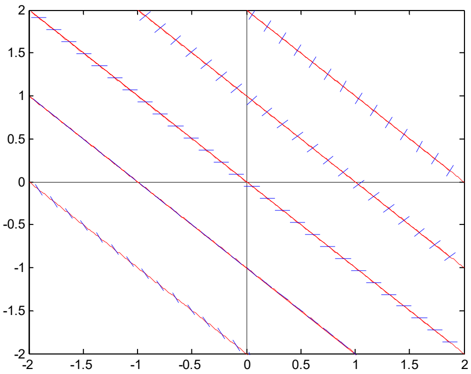
Pregunta 2) (4 puntos)

Escribe sobre la figura la ecuación de cada una de las líneas, que representan algunas isoclinas de la ecuación diferencial

$$y' = x + y$$

(con una muestra del campo de direcciones sobre cada una de las líneas).

Señala cuánto vale la pendiente de las curvas solución sobre cada isoclina.



Pregunta 3) (9 puntos)

a) Escribe el código Matlab necesario de manera que se obtengan las coordenadas (x(n), y(n)) de la poligonal que aproxima la solución al problema de valor inicial

$$\{\ y' = y+1\ , \quad y(0)=1\ \}$$

en los puntos $x = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8\ y\ 1$.

Utiliza el método de Euler mejorado y dibuja en la ventana [0,1]x[0,3] la poligonal que aproxima la solución con la orden **`plot`**, en color verde.

b) Escribe el código Matlab para hallar la solución exacta del p.v.i. anterior y dibujar la gráfica correspondiente en la figura anterior; es decir tomando el intervalo $x \in [0,1]$. Pon una leyenda a la gráfica para identificar las dos curvas representadas.

Solución:

\>>

Cálculo II Examen Global del Bloque 2 26 de Mayo de 2017

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

Tiempo (2 horas)

Cuestión 1) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

La familia ortogonal a la familia de curvas $y^2+2x^3=Cx$ es la solución general de la ecuación

A) $\left(y^2-4x^3\right)\cdot y'=-2xy$

B) $2\,y\,y'=C-6x^2$

C) $\left(6x^2-C\right)\cdot y'=2y$

D) Ninguna de las anteriores. (4 puntos)

Cuestión 2) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

A) La ecuación diferencial $4x^2-xy+y^2+\left(x^2-xy+4y^2\right)\cdot y'=0$ no es una ecuación diferencial homogénea.

B) Una solución particular de la ecuación diferencial $y'-2xy=2e^{x^2}$ es $y(x)=x^2\cdot e^{x^2}$.

C) La ecuación de la isoclina $y'=1$ de la familia de curvas $y(x)=\operatorname{tg}\left[\log(Cx)\right]$ es $2x=\left(1+y^2\right)$.

D) Ninguna de las anteriores. (12 puntos)

Cuestión 3) Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Dada la ecuación diferencial $y''+y'-2y=3e^x$, podemos afirmar que una solución particular es de la forma:

A) $y_p(x)=Ax\cdot e^{-2x}$.

B) $y_p(x)=Ax\cdot e^{x}$.

C) $y_p(x)=A\cdot e^{x}$.

D) Ninguna de las anteriores. (5 puntos)

Ejercicio 1.- (14 puntos)

Se desea desalar en parte una disolución que está recogida dentro de un depósito de 100 litros, reduciendo a la mitad su contenido de sal que es inicialmente de 12 gramos. Para ello se extrae continuamente agua salada del depósito, que se sustituye por igual cantidad de volumen de otra disolución cuya concentración en sal es de 0,04 gr/l. Determinar el número de litros por minuto (caudal de entrada y salida) que deben renovarse para que al cabo de 10 minutos quede dentro del depósito la mitad de gramos de sal que había inicialmente.

Ejercicio 2.- (12 puntos)

Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $(x+y)\cdot dx+dy=0$, utilizando un factor integrante que sea de la forma $\mu=\mu(x)$.

Ejercicio 3.- (23 puntos)

a) En el siguiente problema de valor inicial, justifica que se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones lineales y define el intervalo donde se garantiza la existencia de solución única.

$$\left\{\; y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}}{x^2} \quad , \quad y(1)=0,\;\; y'(1)=0 \right\}$$

b) Halla la solución del problema de valor inicial anterior.

Cuestión adicional para obtener 5 puntos extra:

Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

Si en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xe^{-y/2} - \frac{2x}{x^2-1}$, se cambia la variable y por $z = e^{y/2}$, la ecuación equivalente resultante es:

A) $\frac{1}{z} = \frac{x}{z} - \frac{x}{x^2-1}$.

B) $dz + \frac{z\,x}{x^2-1} \cdot dx = x$.

C) $dz = \left(x - \frac{z\,x}{x^2-1} \right) \cdot dx$.

D) Ninguna de las anteriores. (5 puntos)

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

Cuestiones resueltas con código Matlab **Tiempo (25 minutos)**

Pregunta 1) (8 puntos)

a) Crea una función Matlab, denominada **sumaRiemann3**, que aproxime el valor de la integral triple $I=\int_h^j\int_c^d\int_a^b (x+z)\cdot e^{\cos(x)}dxdydz$, sobre una caja $[a,b]\times[c,d]\times[h,j]$. La función anterior debe utilizar las sumas de Riemann en los puntos medios de cada coordenada y dependerá de los parámetros siguientes: **a**, **b**, **c**, **d, h, j, m, n** y **p**; siendo **m, n** y **p** los subintervalos tomados en los ejes OX, OY y OZ, respectivamente.

b) Escribe abajo el código Matlab que desde la ventana de comandos permite ejecutar la función **sumaRiemann3** para aproximar la integral

$$I=\int_0^2\int_0^2\int_{-1}^1 (x+z)\cdot e^{\cos(x)}dxdydz$$

Toma una partición de 30 subintervalos en cada eje.

c) Calcula también el valor exacto de la integral I anterior, así como el error cometido en la aproximación del apartado b), en valor absoluto.

Solución:

```
function sumaRiemann3(a,b,c,d,h,j,m,n,p)
%Calcula los incrementos de x, y, z
inc=[(b-a)/m,(d-c)/n, (j-h)/p];
x=a+inc(1)/2:inc(1):b-inc(1)/2;
y=c+inc(2)/2:inc(2):d-inc(2)/2;
z=h+inc(3)/2:inc(3):j-inc(3)/2;
[X,Y,Z]=meshgrid(x,y,z);
valor=(X+Z).*exp(cos(X));
%calcula el valor aproximado de la integral
suma=sum(valor(:))*prod(inc)
%calcula el valor exacto de la integral
syms u v w
I=double(int(int(int((u+w)*exp(cos(u)),u,-1,1),v,0,2),w,0,2))
error=abs(I-suma)
end
```

b) En la ventana de comandos se escribe:

```
>> sumaRiemann3(-1,1,0,2,0,2,30,30,30)
```

El valor aproximado es: $I=\int_0^2\int_0^2\int_{-1}^1 (x+z)\cdot e^{\cos(x)}dxdydz \cong 18.7347$

c) El valor exacto: $I=\int_0^2\int_0^2\int_{-1}^1 (x+z)\cdot e^{\cos(x)}dxdydz = 18.7326$, resultando el $|Error| = 0.0021$

Pregunta 2) (7 puntos)

a) Utiliza código Matlab para dibujar un alambre que tiene la forma de la curva *C*, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t)=4\cos t \ , \ y(t)=9\,\text{sen}\, t \ , \ z(t)=4t \ , \qquad t\in\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$$

b) Calcula a mano el valor del elemento diferencial de longitud del arco de la curva anterior, *ds*. Escribe el código Matlab que permita obtener la longitud de dicha curva, planteando previamente a mano la integral correspondiente.

c) Sea el campo vectorial $\mathbf{V}(x,y,z)=x^2\cdot\mathbf{i}+(x+y)\cdot\mathbf{j}-\mathbf{k}$ que actúa sobre la curva *C*. Sobre la curva C, en 10 puntos equidistantes, dibuja una muestra de los vectores del campo vectorial $\mathbf{V}(x,y,z)$, en color rojo. Pon un título a la gráfica.

Solución:

```
t=0:pi/10:5*pi/2;
x=4*cos(t);
y=9*sin(t);
z=4*t;
plot3(x,y,z)
grid on
syms u
L=double(int(sqrt(16*sin(u)^2+81*cos(u)^2+16),u,0,5*pi/2))
```

El elemento diferencial de longitud del arco de la curva es

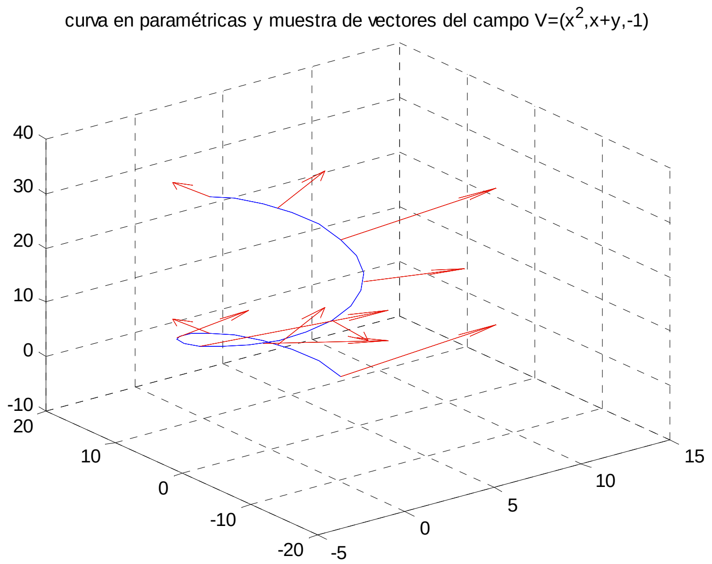
$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\cdot dt=\sqrt{[-4\,\mathrm{sen}(t)]^2+[9\cos(t)]^2+4^2}\cdot dt=\sqrt{16\,\mathrm{sen}^2(t)+81\cos^2(t)+16}\cdot dt,$$

La integral que nos da la longitud del alambre es

$$\text{Longitud}=\int_0^{5\pi/2}\sqrt{16\,\mathrm{sen}^2(t)+81\cos^2(t)+16}\cdot dt=62.0086$$

Apartado c)

```
hold on
%Dibuja 10 vectores equidistantes del campo V=(x^2,x+y,-1)
%sobre la curva
tv=linspace(0,5*pi/2,11);
xv=4*cos(tv);
yv=9*sin(tv);
zv=4*tv;
U=xv.^2;
V=xv+yv;
W=-ones(size(U));
quiver3(xv,yv,zv,U,V,W,'r')
title('curva en paramétricas y muestra de vectores del campo V=(x^2,x+y,-1)')
```



Cálculo II Examen Final del Bloque 2 10 de Junio de 2017

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

Cuestiones resueltas con código Matlab **Tiempo (25 minutos)**

Pregunta 1) (2 puntos)

Utiliza código Matlab para hallar la solución particular de la ecuación diferencial $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+2xy=\dfrac{x}{1+x^2}$ que pasa por el punto $P(2,-1)$.

Solución:

```
>> dsolve('(1+x^2)*Dy+2*x*y=x/(1+x^2)','y(2)=-1','x')
```

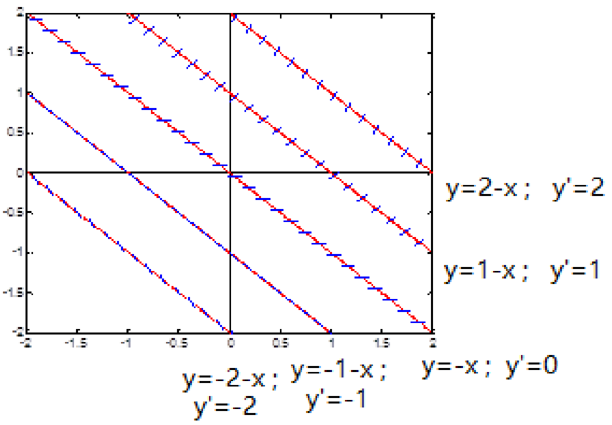
Pregunta 2) (4 puntos)

Escribe sobre la figura la ecuación de cada una de las líneas, que representan algunas isoclinas de la ecuación diferencial

$$y' = x + y$$

(con una muestra del campo de direcciones sobre cada una de las líneas).

Señala cuánto vale la pendiente de las curvas solución sobre cada isoclina.



Pregunta 3) (9 puntos)

a) Escribe el código Matlab necesario de manera que se obtengan las coordenadas (x(n), y(n)) de la poligonal que aproxima la solución al problema de valor inicial

$$\{\ y' = y+1,\quad y(0)=1\ \}$$

en los puntos $x = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8\ y\ 1$.

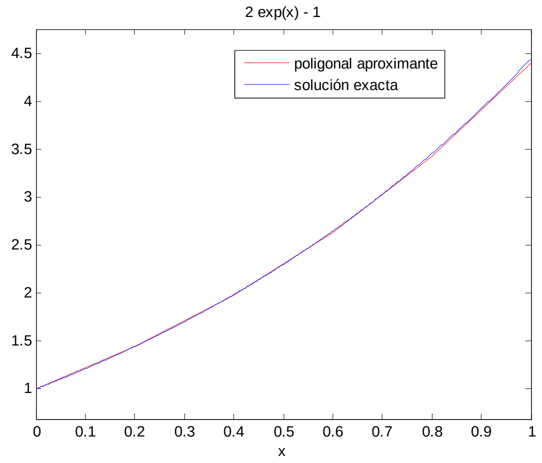
Utiliza el método de Euler mejorado y dibuja en la ventana [0,1]x[0,3] la poligonal que aproxima la solución con la orden **`plot`**, en color verde.

b) Escribe el código Matlab para hallar la solución exacta del p.v.i. anterior y dibujar la gráfica correspondiente en la figura anterior; es decir tomando el intervalo $x \in [0,1]$. Pon una leyenda a la gráfica para identificar las dos curvas representadas.

Solución:

```
%coordenadas del punto por donde pasa la solución particular
x0=0; y0=1;
%valor del paso h y del número de iteraciones nmax
h=0.2; nmax=5;
x=x0:h:x0+h*nmax;
y(1)=y0;
f=@(x,y) eval(vectorize('y+1'))
for n=1:nmax
    yest=y(n)+h*f(x(n),y(n));
    y(n+1)=y(n)+ h*(f(x(n),y(n))+f(x(n+1),yest))/2;
end
```

```
%abre la ventana [0,1]x[0,3]
axis([0,1,0,3])
%dibuja la poligonal en color rojo
plot(x,y,'r')
hold on
%calcula la solución exacta del p. v. i.
yexacta=dsolve('Dy=y+1','y(0)=1','x')
ezplot(yexacta,[0,1])
legend('poligonal aproximante','solución exacta')
hold off
```



Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

PARTE 1 **Tiempo (1 hora 15 min)**

Pregunta 1.- (4 puntos)

La integral $L=\int_0^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} f(x,y)\cdot dy\cdot dx$, verifica

a) $L=\int_0^2 \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)\cdot dx\cdot dy$

b) $L=\int_0^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\cdot dx\cdot dy$

c) $L=\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\cdot dx\cdot dy+\int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\cdot dx\cdot dy$

d) Ninguna de las propuestas es correcta.

Justificación:

Pregunta 2.- (2 puntos)

Las regiones del espacio definidas en coordenadas esféricas

$$H_1=\left\{\begin{matrix}(\rho,\theta,\phi) \ / \ 0\le\rho\le b \ , \\ \rho\cos\phi\le 0 \ , \ 0\le\theta\le 2\pi\end{matrix}\right\}; \qquad H_2=\left\{\begin{matrix}(\rho,\theta,\phi) \ / \ 0\le\rho\le b \ , \\ \frac{\pi}{4}\le\phi\le\frac{\pi}{2} \ , \ 0\le\theta\le 2\pi\end{matrix}\right\}$$

representan los siguientes sólidos

a) H_1 es la semiesfera inferior de centro $(0,0,0)$ y radio b ; H_2 es la semiesfera superior de centro $(0,0,0)$ y radio b .

b) H_1 es la semiesfera superior de centro $(0,0,0)$ y radio b ; H_2 es el trozo de la semiesfera superior de centro $(0,0,0)$ y radio b , exterior al cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

c) H_1 es la semiesfera inferior de centro $(0,0,0)$ y radio b ; H_2 es el trozo de la semiesfera superior de centro $(0,0,0)$ y radio b , que está dentro del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

d) Ninguna de las otras propuestas es correcta.

Justificación:

Pregunta 3.- (2 puntos)

Sea γ la hélice que tiene las ecuaciones paramétricas $x = 5\cos t,\ y = 5\,\mathrm{sen}\, t,\ z = t$ con $t \in [0, 2\pi]$. La cortina vertical que está apoyada sobre el plano XY y su altura es la curva γ tiene por área:

a) $10\pi^2$ unidades de área.

b) 10π unidades de área.

c) Solo se puede calcular con una integral doble por ser un área

d) Ninguna de las anteriores.

Justificación:

Pregunta 4.- (4 puntos)

Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (-y + 2x, y - x^2)$

Afirmación 1. Su función potencial es una función simétrica.

Afirmación 2. Existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ de forma que $\mathbf{F} = rot\,\mathbf{G}$.

a) Son falsas las dos afirmaciones

b) Es cierta solo la afirmación 2

c) Son ciertas las dos afirmaciones

d) Es cierta solo la afirmación 1

Justificación:

Pregunta 5.- (4 puntos)

El valor de la integral $\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS$, siendo S la superficie del cono $z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$, con $0 \le z \le 3$, es:

a) $9\pi / 2$

b) $9\pi / 4$

c) $3\pi\sqrt{3}$

d) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Justificación:

Pregunta 6.- (2 puntos)

La circulación del campo $\mathbf{F} = \left(2y, 3x, -z^2\right)$ alrededor de la circunferencia $\left(x^2 + y^2\right) = 9$, situada en el plano $z = 0$, recorrida en sentido antihorario, es

a) 3π

b) 9π

c) 6π

d) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Justificación:

Pregunta 7.- (2 puntos)

Elige de entre las siguientes ecuaciones aquellas cuyas isoclinas sean rectas:

ecu1: $y' = 1 + y^2$; ecu2: $y' = (x-1)\, y$; ecu3: $y' = \dfrac{(x-1)}{y}$; ecu4: $y' = \cos(x+y)$

a) Todas menos ecu4
b) Todas menos ecu3
c) Todas menos ecu2
d) Todas menos ecu1

Justificación:

Pregunta 8.- (4 puntos)

Elige la ecuación que resulta al hacer el cambio de variable $t = xy$ en la ecuación $\left(x^2 y^3 + y + x - 2\right)dx + \left(x^3 y^2 + x\right)dy = 0$

a) $\left(t\left(1+t^2\right) + x - 2\right)dx + x^2\left(t^2+1\right)dt = 0$
b) $(x-2)\,dx + \left(t^2+1\right)dt = 0$
c) $\left(t\left(1+t^2\right)\left(\dfrac{1}{x} - x\right) + x - 2\right)dx + x^2\left(t^2+1\right)dt = 0$
d) ninguna de las otras propuestas es correcta;

Justificación:

Pregunta 9.- (2 puntos)

Las soluciones de la ecuación $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=0$ para p y q números reales tales que $p^2 < 4q$, cumplen

a) son periódicas si $p = 0$;
b) son monótonas (bien crecientes o bien decrecientes);
c) son de tipo polinómico;
d) ninguna de las otras propuestas es cierta;

Justificación:

Pregunta 10.- (4 puntos)

Dada la ecuación $x^2y''-2xy'(x)+2y=x$, completa o no homogénea,

a) las funciones $y_1(x)=x$ e $y_2(x)=x^2$ son dos soluciones no proporcionales de su ecuación homogénea asociada;
b) puesto que $y_1(x)=x$ e $y_2(x)=x^2$ son soluciones de su ecuación homogénea asociada, podemos buscar una solución particular para la completa de la forma $y_p(x)=(Ax+B)x^3$;
c) puesto que $y_1(x)=x$ e $y_2(x)=x^2$ son soluciones de su ecuación homogénea asociada, podemos buscar una solución particular para la completa de la forma $y_p(x)=Ax+B$;
d) ninguna de las otras afirmaciones presentadas es correcta;

Justificación:

Cálculo II Examen Final 9 de Septiembre de 2017

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Apellidos y nombre: Nº:

PARTE 2 **Tiempo (2 horas 20 min)**

Ejercicio 1.- (a)+b)+c) 11 puntos, d) 5 puntos)

a) Obtén el valor de las constantes a, b, c, tales que el campo vectorial $\mathbf{F}$ verifique que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+2y+az,\ bx-3y-z,\ 4x+cy+2z)$$

b) Halla la función potencial $f(x,y,z)$ asociada al campo vectorial $\mathbf{F}$ del apartado anterior.

c) Calcula el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{F}$ para trasladar la unidad de masa a lo largo de la curva C, que viene dada por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$C \equiv \left\{ x(t) = t,\quad y(t) = 2t,\quad z(t) = \sqrt{t} \right\},\quad t \in [0,1]$$

d) Utiliza código Matlab para representar en color rojo la curva C anterior con línea de grosor dos unidades. En la misma figura representa en color azul el campo $\mathbf{F}$ en 10 puntos repartidos uniformemente por la curva C. Utiliza la misma escala en ambos ejes y pon un título a la gráfica.

Ejercicio 2.- (12 puntos)

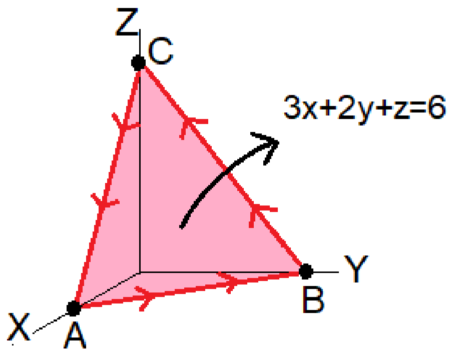
Sea el campo vectorial $\mathbf{E} = y^2 \cdot \mathbf{i} + 2x \cdot \mathbf{j} + \dfrac{z^2}{2} \cdot \mathbf{k}$. Utilizar algún teorema del cálculo vectorial para hallar el flujo del campo $\mathbf{E}$ que sale a través de todas las caras del sólido V definido como

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x^2+y^2+z^2 \le 2\ ,\quad x^2+y^2 \le z \right\}$$

Nota: se recomienda utilizar coordenadas cilíndricas.

Ejercicio 3.- (a) 11 puntos)

Sea el campo vectorial $\mathbf{G} = -3y \cdot \mathbf{i} + 3x \cdot \mathbf{j} + z^4 \cdot \mathbf{k}$. Utilizar algún teorema del cálculo vectorial para hallar el trabajo realizado por el campo $\mathbf{G}$ para trasladar la unidad de masa alrededor del triángulo $\widehat{ABCA}$ que se obtiene al cortar el plano $3x+2y+z=6$ con los tres planos coordenados (ver figura)



Ejercicio 4.- (a) 11 puntos, b) 10 puntos)

a) Encuentra la solución del problema de valor inicial

$$(1+e^{x})yy' = e^{y}\,,\ y(0)=0$$

b) Construye una función de Matlab denominada **`eulerbasico(f,x0,y0,h,nmax)`** que tenga como parámetros de entrada la función $f(x,y)$, las coordenadas (x_0, y_0) del punto por donde pasa la curva, el valor del paso **`h`** y el número de iteraciones **`nmax`**. Con la función **`eulerbasico`** realiza las siguientes operaciones: utiliza el método de Euler básico para obtener las coordenadas (x(n), y(n)) de la poligonal que aproxima la solución al problema de valor inicial

$$\{\ y' = y+1\,,\quad y(0)=1\ \}$$

en los puntos $x = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8\ y\ 1$.

Dibuja en la ventana [0,1]x[0,4] la poligonal que aproxima la solución con la orden **`plot`**, en color verde. Obtén la solución exacta del p.v.i. anterior utilizando cálculo simbólico. Dibuja en la misma ventana gráfica la solución exacta obtenida con el comando `ezplot`, en color azul. Escribe una leyenda sobre la gráfica para identificar la solución aproximada y la solución exacta dibujadas.

Ejercicio 5.- (10 puntos)

Sabiendo que la función $y_1(x) = x^2$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, encuentra la solución general de dicha ecuación diferencial.
