Grado en Ingeniería Química

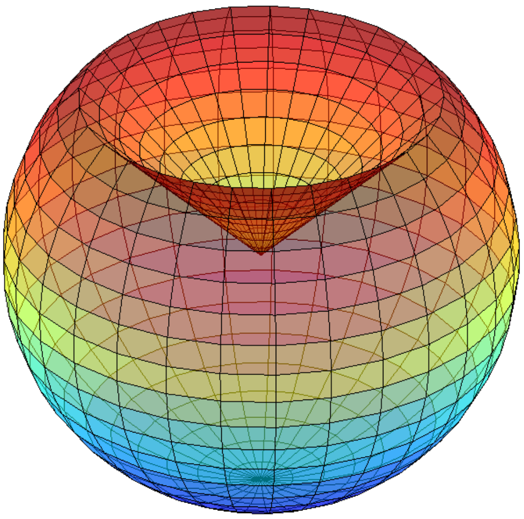
Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **núm**

Examen 1 (14/03/2017) Tiempo 1h 20min
Puntos: 15 sobre 100

EJERCICIO 1 **5 puntos (1.5+2+1.5)**

En una esfera de radio 2 se hace un taladro cónico de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$, como se muestra en la figura. El sólido esférico que queda, extrayendo el material de dicho taladro, tiene una densidad variable en cada punto, igual a la distancia del punto al origen.



a) Calcula la masa del sólido.

b) Calcula la densidad media del sólido. ¿Podrías explicar cuáles son los puntos del sólido que tienen densidad media?

c) Escribe el código en Matlab para dibujar la esfera y el taladro con una transparencia de 0.5

EJERCICIO 2 **5 puntos**

Sea el campo $\mathbf{F}=\left(e^x\cos y,-e^x\operatorname{sen} y,2\right)$.

Probar que $\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$ es independiente del camino y calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre un objeto que se mueve desde $P(0,\pi/2,1)$ hasta $Q(1,\pi,3)$.

EJERCICIO 3 **5 puntos (2+3)**

Sea C el contorno del triángulo cuyos vértices están en los puntos $A(1,1)$, $B(2,2)$ y $C(1,3)$ recorrida en sentido positivo.

a) Utiliza el teorema de Green en el cálculo de la integral

$$I=\oint_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$$

b) Comprueba el resultado del apartado anterior calculando la integral de línea directamente.

PREGUNTA DE TEST POR DETRÁS

T.Herrero

Nombre: **núm**

EJERCICIO 4 **3 puntos**

Invertir el orden de integración en la integral $I=\int_0^{27}\int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)dxdy$, nos lleva a la siguiente integral

a) $I=\int_0^{3}\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx$

b) $I=\int_0^{9/4}\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx+\int_{9/4}^{3}\int_{3x^2}^{27} f(x,y)dydx$

c) $I=\int_0^{3}\int_{12x}^{3x^2} f(x,y)dydx$

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

NOTA: no se valorará la respuesta si no está debidamente justificada.

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

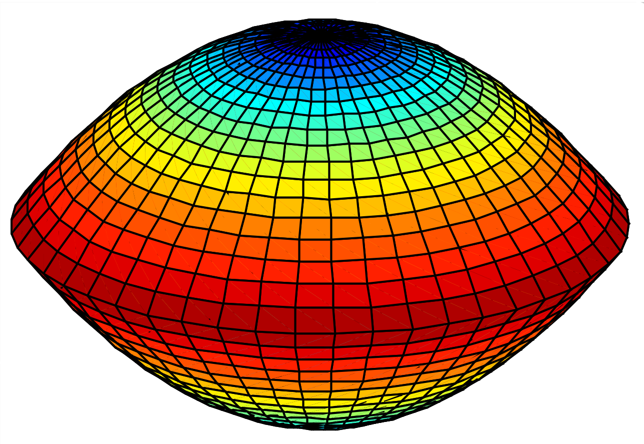
EXAMEN CON MATLAB (06/03/2017) (Tiempo 50min)
PRIMER TURNO (15 puntos sobre 100)

Deberás resolver este ejercicio con ayuda de Matlab. Al finalizar entregarás un único fichero, creado con el editor de Matlab, en el que escribirás tu nombre y apellidos en la primera línea y a continuación los comandos utilizados en la resolución del ejercicio, debiendo incluir líneas de comentario entre apartados. El nombre del fichero será "**examen6mar**".
Entregarás también esta hoja de enunciado con el nombre y los resultados pedidos. **No se permiten calculadoras.**

El envío se hará a través del enlace **"examen_06_03_2017"**, que encontrarás en la página de la asignatura en Aula Virtual.

EJERCICIO

Se considera el sólido limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = a - x^2 - y^2$, que se muestra en la figura. Este sólido está sometido a una temperatura variable, igual a la distancia de cada punto al eje OZ.



a) Escribe el código en Matlab para dibujar las superficies de la figura, coloreadas según la función temperatura y con una transparencia de 0.7.
b) Calcula el volumen del sólido con Matlab, utilizando cálculo simbólico.
c) Calcula la temperatura media del sólido con Matlab, utilizando cálculo simbólico.
d) Representa en la misma figura del apartado a), los puntos del sólido que están a la temperatura media. Dichos puntos serán visibles en la figura si has dado transparencia a la superficie exterior.

   OBSERVACIÓN: en el apartado d), para operar con la temperatura media, calcula previamente su valor decimal con el comando `double`.

NOTA: a es tu número de lista.

Puntuación: **5+5+5+3**

Escribe a continuación los resultados del ejercicio y los planteamientos que hagas a mano

T.Herrero

Para plantear las integrales triples, definimos previamente el sólido en coordenadas cilíndricas. Sabemos que la variación de la coordenada z es:

$$x^2+y^2 \le z \le a-x^2-y^2 \quad \to \quad r^2 \le z \le a-r^2$$

Para saber cuál es la variación de las coordenadas r y θ en el plano XOY, hacemos la intersección de los dos paraboloides,

$$\left.\begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ z=a-(x^2+y^2) \end{array}\right\} \to x^2+y^2=\frac{a}{2}$$

Es decir, el sólido se proyecta en el círculo de centro $(0,0)$ y radio $r_0=\sqrt{\frac{a}{2}}$.

Por lo tanto, la definición del sólido es:

$$H=\left\{ r^2 \le z \le a-r^2,\ 0 \le r \le \sqrt{\frac{a}{2}}\ ,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

Aplicando estos límites, el volumen es:

$$Vol=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a/2}}\int_{r^2}^{a-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

La función temperatura es

$$T(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad T(r,\theta,z)=r$$

Y la temperatura media es

$$Temp=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a/2}}\int_{r^2}^{a-r^2} r^2\,dz\,dr\,d\theta \quad \to \quad T_m=\frac{Temp}{Vol}$$

Para saber cuáles son los puntos del sólido que están a la temperatura media, igualamos la función temperatura a dicha temperatura media,

$$\sqrt{x^2+y^2}=T_m \quad \to \quad r=T_m$$

Se trata de un cilindro de centro $(0,0)$ y radio T_m. Para ver la altura del cilindro, hallamos su intersección con los dos paraboloides,

$$\left.\begin{array}{l} r=T_m \\ r^2=z \end{array}\right\} \to z={T_m}^2 \qquad \left.\begin{array}{l} r=T_m \\ a-r^2=z \end{array}\right\} \to z=a-{T_m}^2$$

Por lo tanto el cilindro de temperatura media verifica

$${T_m}^2 \le z \le a-{T_m}^2$$

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Para obtener tus resultados, puedes ejecutar la siguiente función de Matlab, introduciendo como valor del parámetro "a" tu número de lista. También puedes escribir el código en un fichero normal, declarando al principio el valor de a, sin recurrir a la función.

```
function examen6marzoT1(a)
%a es tu número de lista
%ejecuta esta función con tu valor de a
%para obtener el dibujo y los resultados pedidos
%CÓDIGO PARA DIBUJAR LOS DOS PARABOLOIDES EN PARAMÉTRICAS
%COLOREADOS SEGÚN LA FUNCIÓN TEMPERATURA T(r,t)=r
tv=linspace(0,2*pi,50);%vector de valores del parámetro t
r0=sqrt(a/2);%radio de la circunferencia de corte de los paraboloides
rv=linspace(0,r0,20);%vector de valores del parámetro r
[T,R]=meshgrid(tv,rv);%matrices con los valores de los parámetros
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);%coordenadas x e y de los paraboloides
Z1=R.^2;%coordenada z del paraboloide inferior
surf(X,Y,Z1,R)%dibujo del paraboloide inferior
hold on
Z2=a-R.^2;%coordenada z del paraboloide superior
surf(X,Y,Z2,R)%dibujo del paraboloide superior
alpha 0.7 %transparencia
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%cálculo de las integrales y de la temperatura media utilizando
%cálculo simbólico
syms r t z
Vol=int(int(int(r,z,r^2,a-r^2),r,0,r0),t,0,2*pi)%volumen del sólido
Temp=int(int(int(r^2,z,r^2,a-r^2),r,0,r0),t,0,2*pi)%integral de la
función
%temperatura
Tm=double(Temp/Vol)%valor decimal de la temperatura media
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%dibujo del cilindro cuyos puntos están a temperatura media, Tm=r
z0=Tm^2;%plano en el que se encuentra la circunferencia intersección
%del paraboloide inferior con el cilindro de temperatura media
z1=a-Tm^2;%plano en el que se encuentra la circunferencia intersección
%del paraboloide superior con el cilindro de temperatura media
zv=[z0 z1];%vector de valores de z
[U,V]=meshgrid(tv,zv);%matrices con los valores de los parámetros
X1=Tm*cos(U);Y1=Tm*sin(U);Z1=V;%coordenadas de los puntos del cilindro
de
%temperatura media
C=Tm*ones(size(X1));%distancia al eje OZ de los puntos del cilindro
surf(X1,Y1,Z1,C)%cilindro coloreado según la distancia al eje OZ
axis equal
hold off
end
```

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

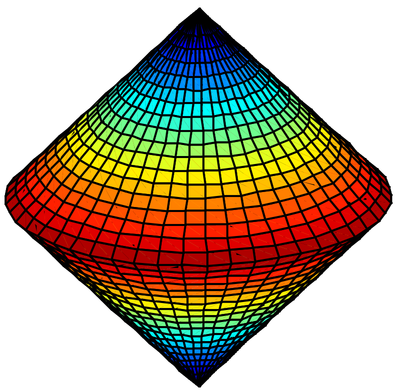
EXAMEN CON MATLAB (06/03/2017) (Tiempo 50min)
SEGUNDO TURNO (15 puntos sobre 100)

Deberás resolver este ejercicio con ayuda de Matlab. Al finalizar entregarás un único fichero, creado con el editor de Matlab, en el que escribirás tu nombre y apellidos en la primera línea y a continuación los comandos utilizados en la resolución del ejercicio, debiendo incluir líneas de comentario entre apartados. El nombre del fichero será "**examen6mar**".
Entregarás también esta hoja de enunciado con el nombre y los resultados pedidos. **No se permiten calculadoras.**

El envío se hará a través del enlace **"examen_06_03_2017"**, que encontrarás en la página de la asignatura en Aula Virtual.

EJERCICIO

Se considera el sólido limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=a-\sqrt{x^2+y^2}$, que se muestra en la figura. Este sólido está sometido a una temperatura variable, igual a la distancia de cada punto al eje OZ.



a) Escribe el código en Matlab para dibujar las superficies de la figura, coloreadas según la función temperatura y con una transparencia de 0.7.

b) Calcula el volumen del sólido con Matlab, utilizando cálculo simbólico.

c) Calcula la temperatura media del sólido con Matlab, utilizando cálculo simbólico.

d) Representa en la misma figura del apartado a), los puntos del sólido que están a la temperatura media. Dichos puntos serán visibles en la figura si has dado transparencia a la superficie exterior.

   OBSERVACIÓN: en el apartado d), para operar con la temperatura media, calcula previamente su valor decimal con el comando `double`.

NOTA: a es tu número de lista.

Puntuación: **5+5+5+3**

Escribe a continuación los resultados del ejercicio y los planteamientos que hagas a mano

T.Herrero

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Para plantear las integrales triples, definimos previamente el sólido en coordenadas cilíndricas. Sabemos que la variación de la coordenada z es:

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le a-\sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad r \le z \le a-r$$

Para saber cuál es la variación de las coordenadas r y θ en el plano XOY, hacemos la intersección de los dos paraboloides,

$$\left.\begin{array}{l} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=a-\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \to \sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{2}$$

Es decir, el sólido se proyecta en el círculo de centro $(0,0)$ y radio $r_0=\dfrac{a}{2}$

Por lo tanto, la definición del sólido es:

$$H=\left\{r \le z \le a-r,\ 0 \le r \le \frac{a}{2},\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

Aplicando estos límites, el volumen es:

$$Vol=\int_0^{2\pi}\int_0^{a/2}\int_r^{a-r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

La función temperatura es

$$T(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad T(r,\theta,z)=r$$

Y la temperatura media es

$$Temp=\int_0^{2\pi}\int_0^{a/2}\int_r^{a-r} r^2\,dz\,dr\,d\theta \quad \to \quad T_m=\frac{Temp}{Vol}$$

Para saber cuáles son los puntos del sólido que están a la temperatura media, igualamos la función temperatura a dicha temperatura media,

$$\sqrt{x^2+y^2}=T_m \quad \to \quad r=T_m$$

Se trata de un cilindro de centro $(0,0)$ y radio T_m. Para ver la altura del cilindro, hallamos su intersección con los dos paraboloides,

$$\left.\begin{array}{l} r=T_m \\ r=z \end{array}\right\} \to z=T_m \qquad \left.\begin{array}{l} r=T_m \\ a-r=z \end{array}\right\} \to z=a-T_m$$

Por lo tanto el cilindro de temperatura media verifica

$$T_m \le z \le a-T_m$$

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Para obtener tus resultados, puedes ejecutar la siguiente función de Matlab, introduciendo como valor del parámetro "a" tu número de lista. También puedes escribir el código en un fichero normal, declarando al principio el valor de a, sin recurrir a la función.

```
function examen6marzoT2(a)
%a es tu número de lista
%ejecuta esta función con tu valor de a
%para obtener el dibujo y los resultados pedidos
%CÓDIGO PARA DIBUJAR LOS DOS CONOS EN PARAMÉTRICAS
%COLOREADOS SEGÚN LA FUNCIÓN TEMPERATURA T(r,t)=r
tv=linspace(0,2*pi,50);%vector de valores del parámetro t
r0=a/2;%radio de la circunferencia de corte de los conos
rv=linspace(0,r0,20);%vector de valores del parámetro r
[T,R]=meshgrid(tv,rv);%matrices con los valores de los parámetros
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);%coordenadas x e y de los conos
Z1=R;%coordenada z del cono inferior
surf(X,Y,Z1,R)%dibujo del cono inferior
hold on
Z2=a-R;%coordenada z del cono superior
surf(X,Y,Z2,R)%dibujo del cono superior
alpha 0.7 %transparencia
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%cálculo de las integrales y de la temperatura media utilizando
%cálculo simbólico
syms r t z
Vol=int(int(int(r,z,r,a-r),r,0,r0),t,0,2*pi)%volumen del sólido
Temp=int(int(int(r^2,z,r,a-r),r,0,r0),t,0,2*pi)%integral de la función
%temperatura
Tm=double(Temp/Vol)%valor decimal de la temperatura media
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%dibujo del cilindro cuyos puntos están a temperatura media, Tm=r
z0=Tm;%plano en el que se encuentra la circunferencia intersección
%del paraboloide inferior con el cilindro de temperatura media
z1=a-Tm;%plano en el que se encuentra la circunferencia intersección
%del paraboloide superior con el cilindro de temperatura media
zv=[z0 z1];%vector de valores de z
[U,V]=meshgrid(tv,zv);%matrices con los valores de los parámetros
X1=Tm*cos(U);Y1=Tm*sin(U);Z1=V;%coordenadas de los puntos del cilindro
de
%temperatura media
C=Tm*ones(size(X1));%distancia al eje OZ de los puntos del cilindro
surf(X1,Y1,Z1,C)%cilindro coloreado según la distancia al eje OZ
axis equal
hold off
end
```

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

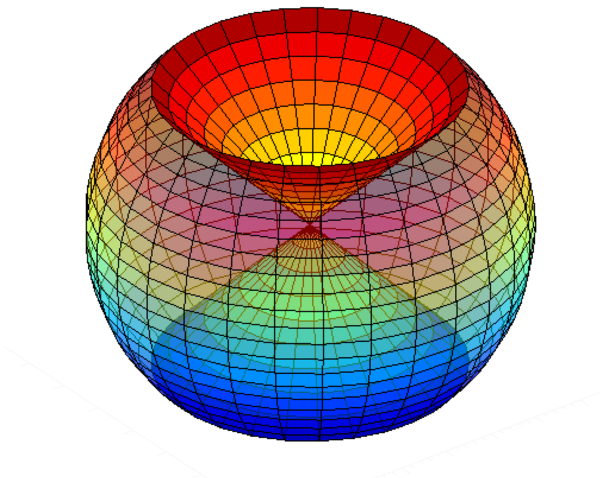
Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

EXAMEN CON MATLAB (08/03/2017) (Tiempo 50min)
ESPECIAL (15 puntos sobre 100)

Deberás resolver este ejercicio con ayuda de Matlab. Al finalizar entregarás un único fichero, creado con el editor de Matlab, en el que escribirás tu nombre y apellidos en la primera línea y a continuación los comandos utilizados en la resolución del ejercicio, debiendo incluir líneas de comentario entre apartados. El nombre del fichero será "**examen8mar**".
Entregarás también esta hoja de enunciado con el nombre y los resultados pedidos. **No se permiten calculadoras.**

EJERCICIO

En una esfera de radio 2 se hacen dos taladros cónicos de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, como se muestra en la figura. El sólido esférico que queda tiene una densidad variable en cada punto, proporcional al cuadrado de la distancia del punto al eje OZ.



a) Escribe el código en Matlab para dibujar la esfera y los taladros con una transparencia de 0.5.
b) Calcula la masa del sólido con Matlab, utilizando cálculo simbólico.
c) Calcula la densidad media del sólido con Matlab, utilizando cálculo simbólico. ¿Podrías explicar cuáles son los puntos del sólido que tienen densidad media?

Puntuación: **8+5+5**

Escribe a continuación los resultados del ejercicio y los planteamientos que hagas a mano

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Código en Matlab:

```
u=linspace(pi/4,3*pi/4,20);
v=linspace(0,2*pi,30);
[U,V]=meshgrid(u,v);
X=2*sin(U).*cos(V);
Y=2*sin(U).*sin(V);
Z=2*cos(U);
surf(X,Y,Z)%dibujo de la esfera
alpha 0.5
hold on
r=linspace(0,sqrt(2),10);
[R,T]=meshgrid(r,v);
X1=R.*cos(T);
Y1=R.*sin(T);
Z1=R;
Z2=-R;
surf(X1,Y1,Z1)%dibujo del cono superior
surf(X1,Y1,-Z1)%dibujo del cono inferior
axis equal
grid off
hold off
%cálculo del volumen y la densidad media utilizando cálculo simbólico
syms ro fi tita
vol=int(int(int(ro^2*sin(fi),ro,0,2),fi,pi/4,3*pi/4),tita,0,2*pi)
masa=int(int(int(ro^4*sin(fi)^3,ro,0,2),fi,pi/4,3*pi/4),tita,0,2*pi)
dm=masa/vol
```

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

EXAMEN CON MATLAB (24/04/2017) (Tiempo 50min)
OPCIÓN A (15 puntos sobre 100)

Deberás resolver este ejercicio con ayuda de Matlab. Al finalizar entregarás un único fichero, creado con el editor de Matlab, en el que escribirás tu nombre y apellidos en la primera línea y a continuación los comandos utilizados en la resolución del ejercicio, debiendo incluir líneas de comentario entre apartados. El nombre del fichero será "**XXX24abril**", donde XXX son las iniciales de tu nombre y dos apellidos.
Entregarás también esta hoja de enunciado con el nombre y los resultados pedidos. **No se permiten calculadoras.**

El envío se hará a través del enlace **"examen 24_04"**, que encontrarás en la página de la asignatura en Aula Virtual.

EJERCICIO

Dada la ecuación diferencial

$$y' = y - ax$$

Se pide:

a) Encuentra la solución general a mano.

b) Confirma que la solución obtenida es correcta utilizando el comando `dsolve` de Matlab.

c) Dibuja en una misma figura

- Una muestra de 20 curvas solución, pasando por los puntos $(0, y_0)$ para valores de y_0 tales que $-a-2 \le y_0 \le a+2$, en color rojo. Haz la representación en $[-1, 0.2]$.
- Una muestra de isoclinas de pendientes variando en el intervalo $[-a-3, a+3]$, equidistantes 0.5, en color azul.
- El campo de direcciones en el rectángulo $[-1,0]\times[-a-2, a+2]$, tomando paso 0.1 en horizontal y 0.5 en vertical, en color negro.

d) Utilizando la ecuación diferencial, estudia la monotonía y la concavidad de las soluciones y comprueba que las conclusiones de dicho estudio coinciden con lo reflejado en la gráfica. ¿Tienen las soluciones puntos de inflexión? ¿y extremos?

e) Representa en la misma figura, el lugar geométrico de los puntos donde las soluciones cambian de crecientes a decrecientes, y el lugar geométrico de los puntos que separa la región donde las soluciones son cóncavas de la región donde son convexas. Dibuja estos lugares geométricos en distinto color y con trazo más grueso, utilizando la opción , `'LineWidth',2,` como argumento del comando de dibujo.

NOTA: Si tu número de lista tiene una cifra, entonces a es tu número de lista. Si tu número de lista tiene dos cifras, entonces a es la cifra de las decenas.

Puntuación: **3+1+6+5+3**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Escribe a continuación los cálculos y planteamientos que hagas a mano

a) Se trata de una ecuación lineal, la resolvemos a mano aplicando el método del factor integrante

$$y' - y = -ax \;\rightarrow\; \begin{cases} p(x) = -1 \\ q(x) = -ax \end{cases}$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

La solución general es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int q(x)\mu(x)dx = e^{x}\int -axe^{-x}dx = -ae^{x}\int xe^{-x}dx$$

Resolvemos esta integral por partes

$$\int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{matrix} x = u \\ e^{-x}dx = dv \end{matrix} \right\} = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Por lo tanto,

$$y(x) = -ae^{x}\left(-xe^{-x} - e^{-x} + C\right) = Ce^{x} + a\left(x+1\right)$$

b) Solución con `dsolve`,

```
sol=dsolve('Dy=y-a*x','x')
```

se obtiene el mismo resultado

```
sol=a + a*x - C5*exp(x)
```

c) Para dibujar las curvas solución, calculamos la constante en función del punto de paso $(0, y_0)$

$$y_0 = C + a \;\rightarrow\; C = y_0 - a$$

- Las soluciones buscadas son de la forma

$$y(x) = \left(y_0 - a\right)e^{x} + a\left(x+1\right)$$

- La ecuación de la isoclina de pendiente m es la recta

$$y = ax + m$$

Para hacer las representaciones que se piden en este apartado, se puede ejecutar el siguiente código, introduciendo como parámetro de entrada el valor de a, que corresponda a cada uno.

```
function examen24_4(a)
%representaciones gráficas
%dibujo de 20 soluciones pasando por (0,y0)
%con y0 cumpliendo -a-2<=y0<=a+2, en color rojo
```

```
x=linspace(-1,0.2,30);
hold on
for y0=linspace(-a-2,a+2,20)
    y=(y0-a)*exp(x)+a*(x+1);
    plot(x,y,'r')
end
%dibujo de las isoclinas en color azul
for m=-a-3:0.5:a+3
    z=a*x+m;
    plot(x,z,'b')
end
%dibujo del campo de direcciones en color negro
u=-1:0.1:0;
v=-a-2:0.5:a+2;
[U,V]=meshgrid(u,v);
h=quiver(U,V,ones(size(U)),V-a*U,'k')
set(h,'ShowArrowHead','off')
hold off
end
```

d) Estudio de la monotonía y extremos:
Las soluciones serán crecientes si $y' \geq 0 \ \rightarrow \ y \geq ax$
y serán decrecientes si $y' \leq 0 \ \rightarrow \ y \leq ax$
Puesto que la recta $y = ax$, no es solución de la ecuación diferencial, las soluciones tomarán sus valores máximos sobre ella ya que pasan de crecientes a decrecientes.

Estudio de la concavidad y puntos de inflexión:
Las soluciones son cóncavas si $y'' \geq 0 \ \rightarrow \ y' - a = y - a(x+1) \geq 0 \ \rightarrow \ y \geq a(x+1)$
Las soluciones son convexas si $y \leq a(x+1)$
La recta $y = a(x+1)$ es solución de la ecuación diferencial entonces, por cumplirse el teorema de existencia y unicidad, las restantes soluciones no pueden cruzarse con ella, por lo que no tienen puntos de inflexión. Son siempre cóncavas en el semiplano $y \geq a(x+1)$ y siempre convexas en el semiplano $y \leq a(x+1)$

e) Para dibujar los lugares geométricos pedidos, podemos añadir a la función anterior el siguiente código, (antes del comando `hold off`):

```
%Dibujo de la recta donde las soluciones toman sus valores máximos
y=a*x;
plot(x,y,'m','LineWidth',2)

%dibujo de la recta que separa la región donde  las soluciones son
%cóncavas de la región donde son convexas
y=a*(x+1);
plot(x,y,'g','LineWidth',2)
```

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

EXAMEN CON MATLAB (24/04/2017) (Tiempo 50min)
OPCIÓN B (15 puntos sobre 100)

Deberás resolver este ejercicio con ayuda de Matlab. Al finalizar entregarás un único fichero, creado con el editor de Matlab, en el que escribirás tu nombre y apellidos en la primera línea y a continuación los comandos utilizados en la resolución del ejercicio, debiendo incluir líneas de comentario entre apartados. El nombre del fichero será "**XXX24abril**", donde XXX son las iniciales de tu nombre y dos apellidos.
Entregarás también esta hoja de enunciado con el nombre y los resultados pedidos. **No se permiten calculadoras.**

El envío se hará a través del enlace **"examen 24_04"**, que encontrarás en la página de la asignatura en Aula Virtual.

EJERCICIO

Dada la ecuación diferencial

$$y' = ax - y$$

Se pide:

a) Encuentra la solución general a mano.

b) Confirma que la solución obtenida es correcta utilizando el comando `dsolve` de Matlab.

c) Dibuja en una misma figura

- Una muestra de 20 curvas solución, pasando por los puntos $(0, y_0)$ para valores de y_0 tales que $-a-2 \le y_0 \le a+2$, en color rojo. Haz la representación en $[-1, 0.2]$.
- Una muestra de isoclinas de pendientes variando en el intervalo $[-a-3, a+3]$, equidistantes 0.5, en color azul.
- El campo de direcciones en el rectángulo $[-1,0]\times[-a-2, a+2]$, toma paso 0.1 en horizontal y 0.5 en vertical.
- Utilizando la ecuación diferencial, estudia la monotonía y la concavidad de las soluciones y comprueba que las conclusiones de dicho estudio coinciden con lo reflejado en la gráfica.

d) Utilizando la ecuación diferencial, estudia la monotonía y la concavidad de las soluciones y comprueba que las conclusiones de dicho estudio coinciden con lo reflejado en la gráfica. ¿Tienen las soluciones puntos de inflexión? ¿y extremos?

e) Representa en la misma figura, el lugar geométrico de los puntos donde las soluciones cambian de crecientes a decrecientes, y el lugar geométrico de los puntos que separa la región donde las soluciones son cóncavas de la región donde son convexas. Dibuja estos lugares geométricos en distinto color y con trazo más grueso, utilizando la opción , `'LineWidth',2,` como argumento del comando de dibujo.

NOTA: Si tu número de lista tiene una cifra, entonces a es tu número de lista. Si tu número de lista tiene dos cifras, entonces a es la cifra de las decenas.

Puntuación: **3+1+6+5+3**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Escribe a continuación los cálculos y planteamientos que hagas a mano

a) Se trata de una ecuación lineal, la resolvemos a mano aplicando el método del factor integrante

$$y' + y = ax \;\rightarrow\; \begin{cases} p(x) = 1 \\ q(x) = ax \end{cases}$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^{x}$$

La solución general es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int q(x)\mu(x)dx = e^{-x}\int axe^{x}dx = ae^{-x}\int xe^{x}dx$$

Resolvemos esta integral por partes

$$\int xe^{x}dx = \left\{ \begin{matrix} x = u \\ e^{x}dx = dv \end{matrix} \right\} = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C$$

Por lo tanto,

$$y(x) = ae^{-x}\left(xe^{x} - e^{x} + C\right) = Ce^{-x} + a\left(x-1\right)$$

b) Solución con `dsolve`,

```
sol=dsolve('Dy=a*x-y','x')
```

se obtiene el mismo resultado

```
sol= a*x - a + C3*exp(-x)
```

c) Para dibujar las curvas solución, calculamos la constante en función del punto de paso $(0, y_0)$

$$y_0 = C - a \;\rightarrow\; C = y_0 + a$$

- Las soluciones buscadas son de la forma

$$y(x) = \left(y_0 + a\right)e^{-x} + a\left(x-1\right)$$

- La ecuación de la isoclina de pendiente m es la recta

$$y = ax - m$$

Para hacer las representaciones que se piden en este apartado, se puede ejecutar el siguiente código, introduciendo como parámetro de entrada el valor de a, que corresponda a cada uno.

```
function examen24_4(a)
%representaciones gráficas
%dibujo de 20 soluciones pasando por (0,y0)
%con y0 cumpliendo -a-2<=y0<=a+2, en color rojo
```

```
x=linspace(-1,0.2,30);
hold on
for y0=linspace(-a-2,a+2,20)
    y=(y0+a)*exp(-x)+a*(x-1);
    plot(x,y,'r')
end
%dibujo de las isoclinas en color azul
for m=-a-3:0.5:a+3
    z=a*x-m;
    plot(x,z,'b')
end
%dibujo del campo de direcciones en color negro
u=-1:0.1:0;
v=-a-2:0.5:a+2;
[U,V]=meshgrid(u,v);
h=quiver(U,V,ones(size(U)),a*U-V,'k')
set(h,'ShowArrowHead','off')
hold off
end
```

d) Estudio de la monotonía y extremos:

Las soluciones serán crecientes si $y' \geq 0 \;\rightarrow\; y \leq ax$

y serán decrecientes si $y' \leq 0 \;\rightarrow\; y \geq ax$

Puesto que la recta $y = ax$, no es solución de la ecuación diferencial, las soluciones tomarán sus valores mínimos sobre ella ya que pasan de decrecientes a crecientes.

Estudio de la concavidad y puntos de inflexión:

Las soluciones son cóncavas si $y'' \geq 0 \;\rightarrow\; a - y' = a - (ax - y) \geq 0 \;\rightarrow\; y \geq a(x-1)$

Las soluciones son convexas si $y \leq a(x-1)$

La recta $y = a(x-1)$ es solución de la ecuación diferencial entonces, por cumplirse el teorema de existencia y unicidad, las restantes soluciones no pueden cruzarse con ella, por lo que no tienen puntos de inflexión. Son siempre cóncavas en el semiplano $y \geq a(x-1)$ y siempre convexas en el semiplano $y \leq a(x-1)$

e) Para dibujar los lugares geométricos pedidos, podemos añadir a la función anterior el siguiente código, (antes del comando `hold off`):

```
%Dibujo de la recta donde las soluciones toman sus valores máximos
y=a*x;
plot(x,y,'m','LineWidth',2)

%dibujo de la recta que separa la región donde  las soluciones son
%cóncavas de la región donde son convexas
y=a*(x-1);
plot(x,y,'g','LineWidth',2)
```

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Examen 2 (9/05/2017) Tiempo 1h 20min
Puntos: (15+3) sobre 100

EJERCICIO 1 **5 puntos (3+1+1)**

a) El carbono C^{14} extraído de un cráneo antiguo era solamente una sexta parte del extraído de un hueso de los tiempos actuales. ¿Cuál era la antigüedad del cráneo?

b) Dibuja razonadamente, la gráfica de N en función de t en el intervalo $\left[0, t_f\right]$, siendo t_f la antigüedad del cráneo obtenida en el apartado anterior $(t_f \approx 14200 \ \ años)$.

c) Escribe el código en Matlab para aproximar el valor de $N(t_f)$, tomando $N_0 = 1$ y un paso de 100 años. Para hacer esta aproximación utilizarás la siguiente función de Matlab:

```
function y=eulermejgraf(f,t0,y0,h,nmax)
t=t0:h:t0+h*nmax;
y(1)=y0;
for n=1:nmax
    yest=y(n)+h*f(t(n),y(n));
    y(n+1)=y(n)+ h*(f(t(n),y(n))+f(t(n+1),yest))/2;
end
plot(t,y)
grid on
end
```

INDICACIÓN: La datación mediante C^{14} se basa en que en los átomos de carbono de cualquier organismo viviente hay una proporción constante de este isótopo radiactivo. Esta proporción se mantiene constante porque hay un equilibrio entre la desintegración del isótopo y la reposición del mismo mientras el organismo está vivo, pero cuando éste muere, el isótopo sigue desintegrándose sin que se reponga.

Si llamamos $N(t)$ al número de átomos de C^{14} en el año t, se cumple que el ritmo al que disminuye $N(t)$ es proporcional al número de átomos, $N(t)$, presentes en dicho año t. La constante de proporcionalidad se llama constante de decaimiento, que para el C^{14} vale aproximadamente 0.000126 (esta constante se determina de forma experimental).

En este ejercicio debes encontrar $N(t)$, con la condición inicial $N_0 = N(0)$, que es el valor de N cuando murió el dueño del cráneo, y buscar cuánto vale t para que N sea la sexta parte de N_0.

Resolución:

a) Variables:

- $N(t)$, es el número de átomos, C^{14}, en el año t
- t, es el tiempo en años.

Problema de valor inicial que modeliza este proceso de desintegración:

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dN}{dt}=-kN, \quad k=126\cdot 10^{-6}\\ N(0)=N_0\end{array}\right\}$$

Resolvemos por separación de variables,

$$\frac{dN}{N}=-kdt \quad\rightarrow\quad \log N=-kt+C_1 \quad\rightarrow\quad N=Ce^{-kt}, \quad (C>0)$$

Aplicamos la condición inicial para calcular C,

$$N(0)=N_0 \quad\rightarrow\quad C=N_0$$

La solución del p.v.i. es

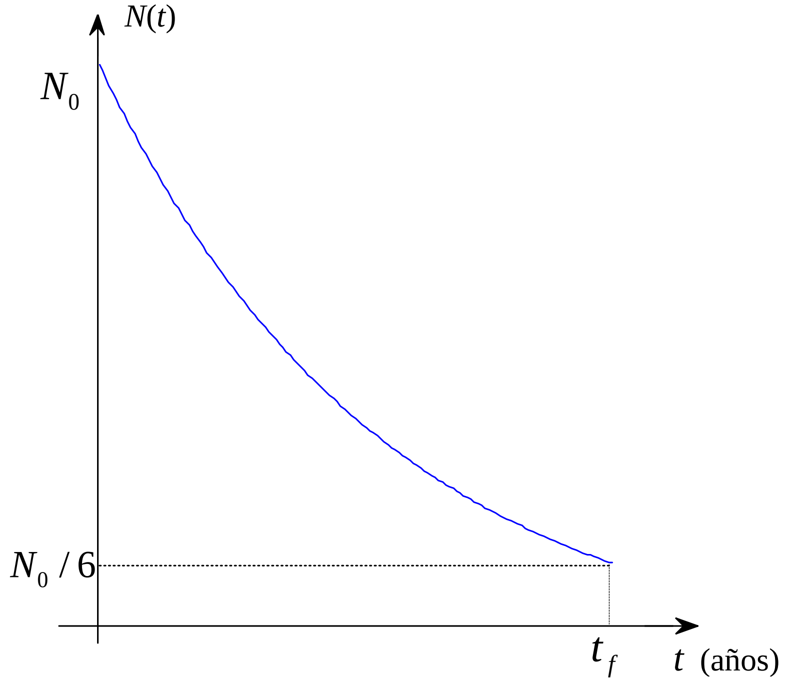
$$N=N_0e^{-kt}$$

Calculamos t para que se cumpla $N=N_0/6$

$$\frac{N_0}{6}=N_0e^{-kt} \quad\rightarrow\quad -kt=-\log 6 \quad\rightarrow\quad t=\frac{\log 6}{k}\approx 14200 \ \textit{años}$$

El tiempo que tarda el C^{14} en reducirse a la sexta parte, es independiente de la cantidad inicial, N_0 .

b) Dibujo aproximado de la gráfica



Para dibujar la gráfica se debe comprobar que la función es decreciente y cóncava en $\left[0, t_f\right]$

- $N' = -k \cdot N \;\; \rightarrow \;\; N' < 0$, por lo tanto $N(t)$ es decreciente
- $N'' = -k \cdot N' = k^2 N \;\; \rightarrow \;\; N'' > 0$, por lo tanto $N(t)$ es cóncava.

c) Código en Matlab:

```
k=126*10^(-6);
f=@(t,N) -k*N;
h=100; nmax=142;
y=eulermejgraf(f,0,1,h,nmax);
```

OBSERVACIONES:

- Aunque se pida la gráfica aproximada de la solución, se debe justificar su forma.
- En los métodos de Euler, el dato es $y' = f(x,y)$ por lo que la función en línea que definimos es $f(x,y)$, y no la solución. Precisamente la solución es lo que se aproxima con éstos métodos.

EJERCICIO 2 **5 puntos (3+1+1)**

a) Encuentra todas las soluciones de la ecuación $y' = xy^2$

b) ¿Existe una solución única cumpliendo la condición $y(x_0) = y_0$, para cualquier par de números reales x_0 e y_0 ?, ¿por qué?

c) Encuentra la solución que verifica $y(1) = 0$, en caso de que exista.

Resolución:

a) Resolvemos por separación de variables. La ecuación es equivalente a las dos siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y^2} = xdx \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Buscamos la solución general,

$$\int \frac{dy}{x^2} = \int xdx \;\; \rightarrow \;\; -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \;\; \rightarrow \;\; y = \frac{-2}{x^2 + C}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial, comprobamos que $y = 0$ es una solución singular.

b) Comprobamos que se cumple el teorema de existencia y unicidad, ya que

$$f(x,y) = xy^2, \quad f_y'(x,y) = 2xy$$

son funciones continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto por cualquier punto del plano $\left(x_0, y_0\right)$ pasa una única solución de la ecuación diferencial, cumpliendo $y(x_0) = y_0$.

- Si $y_0 \neq 0$, esta solución es $\dfrac{1}{y_0} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2 - x_0^2}{2}$
- Si $y_0 = 0$, la solución es la singular, $y = 0$

c) El punto $(1,0)$ es un punto de la recta $y = 0$, y puesto que esta recta es solución de la ecuación diferencial, será la solución buscada.

OBSERVACIONES:

- La e. d. inicial es la misma que $\dfrac{dy}{y^2} = xdx$ si y sólo si $y \neq 0$, por lo tanto hay que comprobar la posible solución perdida $y = 0$.
- Si se opta por encontrar la solución explícita, despejando y, hay que operar con cuidado para que la constante quede en el denominador.

EJERCICIO 3 **5 puntos**

Utiliza el método de los coeficientes indeterminados para obtener una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + 6y' + 9y = x\cos 3x$.

Resolución:

Solución de la ecuación homogénea: $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$

Buscamos la familia de funciones del término independiente derivando dos veces la función $x\cos 3x$. Al derivar se obtienen las siguientes funciones:

$$\{\operatorname{sen} 3x,\quad \cos 3x,\quad x\operatorname{sen} 3x,\quad x\cos 3x\}$$

Por lo tanto la solución particular será una combinación lineal de ellas, ya que ningún término es solución de la ecuación homogénea,

$$y_p = A\cos 3x + Bx\cos 3x + C\operatorname{sen} 3x + Dx\operatorname{sen} 3x$$

- Derivamos y agrupamos las derivadas expresándolas como combinación lineal de las funciones de la familia, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_p' &= (B + 3C)\cos 3x + 3Dx\cos 3x + (-3A + D)\operatorname{sen} 3x - 3Bx\operatorname{sen} 3x \\ y_p'' &= (-9A + 6D)\cos 3x - 9Bx\cos 3x + (-6B - 9C)\operatorname{sen} 3x - 9Dx\operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

- Sustituimos en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} y'' + 6y' + 9y = {} & (6D + 6B + 18C)\cos 3x + 18Dx\cos 3x + \\ & + (-6B - 18A + 6D)\operatorname{sen} 3x - 18Bx\operatorname{sen} 3x = x\cos 3x \end{aligned}$$

- Obligamos a que la igualdad resultante sea cierta para todo valor de x, igualando los coeficientes de cada una de las funciones de la familia presentes en los dos miembros de la ecuación. Haciendo esto se obtiene el sistema,

$$\left.\begin{aligned} 6D+6B+18C&=0\\ 6D-6B-18A&=0\\ 18D&=1\\ -18B&=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad D=\frac{1}{18},\quad B=0,\quad A=\frac{1}{54},\quad C=-\frac{1}{54}$$

La solución particular buscada es,

$$y_p=\frac{1}{54}\cos 3t-\frac{1}{54}\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{18}t\operatorname{sen} 3t$$

EJERCICIO 4 **3 puntos**

La ecuación $y_1(x)=e^x$ es solución de la ecuación $xy''-(x+2)y'+2y=0$. Si $y_2(x)$ es otra solución de esta ecuación, la función $v(x)=\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ cumple que,

a) Es solución de la ecuación $xv''+(x-2)v'=0$

b) $v'(x)=Cx^2e^{-x}$, siempre que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ no sean proporcionales.

c) Las dos afirmaciones anteriores son ciertas

d) Ninguna de las afirmaciones de los apartados a) y b) son ciertas.

Resolución:

La segunda solución es de la forma $y_2(x)=v(x)y_1(x)=v(x)e^x$. Derivamos y sustituimos en la ecuación diferencial para obtener $v(x)$,

$$y_2'(x)=v'(x)e^x+v(x)e^x=\big(v(x)+v'(x)\big)e^x$$
$$y''(x)=v''(x)e^x+2v'(x)e^x+v(x)e^x=\big(v''(x)+2v'(x)+v(x)\big)e^x$$

$$\begin{aligned} xy''-(x+2)y'+2y&=\\ &=x\big(v''(x)+2v'(x)+v(x)\big)e^x-(x+2)\big(v(x)+v'(x)\big)e^x+2v(x)e^x\\ &=\big(xv''(x)+xv'(x)-2v'(x)\big)e^x=\big(xv''+(x-2)v'\big)e^x=0 \end{aligned}$$

Puesto que $e^x\neq 0$ para todo x, debe ser $xv''+(x-2)v'=0$.
Por lo tanto, la opción "a" es correcta.

Si integramos esta ecuación diferencial por separación de variables, obtendremos $v'(x)$,

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{2-x}{x} \quad \to \quad \log|v'(x)| = \int \frac{2-x}{x}\,dx \quad \to \quad \log|v'(x)| = 2\log|x| - x + C$$

simplificando esta expresión se obtiene $v'(x) = Cx^2 e^{-x}$

Por lo tanto la opción "b" es correcta, y puesto que también lo era la opción "a", la respuesta correcta es la "c".

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Examen obligatorio - primera parte (14/06/2017) Tiempo 55 min.
Puntos: 20 sobre 40

La resolución de los apartados que se hacen con Matlab la enviarás en un único fichero, creado con el editor de Matlab, en el que escribirás tu nombre y apellidos en la primera línea y a continuación los comandos utilizados, debiendo incluir líneas de comentario entre apartados. El nombre del fichero será las iniciales de tu nombre y tus dos apellidos, seguidos de la fecha "XXX14junio".

IMPORTANTE: en la página de la asignatura en Aula Virtual encontrarás el enlace **"examen 14_06".** Utiliza este enlace **antes de empezar el examen** para descargar el fichero "`eulermejsist`" y **después de terminar el examen** para enviar tu fichero.

NOTA: Si tu número de lista tiene una cifra, entonces a es tu número de lista. Si tu número de lista tiene dos cifras, entonces a es la cifra de las decenas.

EJERCICIO 20 puntos (3+3+4+3+4+3)

Se considera el siguiente problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{l} 3t^2 y''(t) - 5ty'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(1) = a\,,\ \ y'(1) = 2/3 \end{array}\right\}$$

SE PIDE:

- APARTADOS PARA RESOLVER A MANO
  a) Escribe el sistema del tipo

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t)) & , \quad x_1(1) = y_0 \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)) & , \quad x_2(1) = y_1 \end{cases}$$

  equivalente al problema dado.

  b) Escribe las fórmulas del método de Euler mejorado correspondientes al sistema anterior, para un conjunto de puntos equidistantes un paso $h = 0.2$, en el intervalo $[1, 2]$. Recuerda que dichas fórmulas para un sistema cualquiera son:

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = x_{n,1} + \dfrac{h}{2}\Big[f_1(t_n, x_{n,1}, x_{n,2}) + f_1(t_{n+1}, x^*_{n+1,1}, x^*_{n+1,2}) \Big] \\ x_{n+1,2} = x_{n,2} + \dfrac{h}{2}\Big[f_2(t_n, x_{n,1}, x_{n,2}) + f_2(t_{n+1}, x^*_{n+1,1}, x^*_{n+1,2}) \Big] \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

  donde,

$$\begin{cases} x^*_{n+1,1} = x_{n,1} + hf_1(t_n, x_{n,1}, x_{n,2}) \\ x^*_{n+1,2} = x_{n,2} + hf_2(t_n, x_{n,1}, x_{n,2}) \end{cases}$$

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

- APARTADOS PARA RESOLVER CON MATLAB

c) Utiliza la función `eulermejsist`, que se facilita, para aproximar la solución en el conjunto de puntos dado y dibujar la gráfica de dicha aproximación.

```
function xest=eulermejsist(f,t0,vini,h,nmax)
t=t0:h:t0+h*nmax;
xest(1,:)=vini;
   for n=1:nmax
       xest0=xest(n,:)+h*f(t(n),xest(n,:));
       xest(n+1,:)=xest(n,:)+h*(f(t(n),xest(n,:))+f(t(n+1),xest0))/2;
   end
   plot(t,xest(:,1)) )%dibuja sólo las aproximaciones de x1(t)
grid on
end
```

d) Utiliza el comando `dsolve` para encontrar la solución exacta del problema de valor inicial y represéntala en la misma figura con otro color.

e) Utiliza también la función ode45 de Matlab para aproximar el valor de la solución y represéntala en la misma figura con otro color. Incluye una leyenda para distinguir las tres gráficas dibujadas.

f) Con los resultados obtenidos, completa la siguiente tabla:

n	t_n	aproximación con Euler mejorado $y_n\left(=x_{n,1}\right)$	valor exacto $y(t_n)$	Aproximación con ode45

Resolución:

a) Si llamamos

$$x_1(t)=y(t)\,,\qquad x_2(t)=y'(t)$$

el sistema equivalente es,

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_2(t)\,, & x_1(1)=0 \\ x_2'(t)=\dfrac{5}{3t}x_2(t)-\dfrac{5}{3t^2}x_1(t)\,, & x_2(1)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Resolveremos el sistema y nos quedaremos únicamente con la solución pedida que es $x_1(t)$.

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

---

b) Las fórmulas del método de Euler mejorado para aproximar la solución de este sistema en los puntos de la forma

$$t = 1 + nh, \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \quad h = 0.2$$

son

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = x_{n,1} + \frac{h}{2}\left(x_{n,2} + x^*_{n+1,2}\right) \\ x_{n+1,2} = x_{n,2} + \frac{h}{2}\left(\left(-\frac{5}{3t_n^{\,2}}x_{n,1} + \frac{5}{3t_n}x_{n,2}\right) + \left(-\frac{5}{3t_{n+1}^{\,2}}x^*_{n+1,1} + \frac{5}{3t_{n+1}}x^*_{n+1,2}\right)\right) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

siendo,

$$\begin{cases} x^*_{n+1,1} = x_{n,1} + h\,x_{n,2} \\ x^*_{n+1,2} = x_{n,2} + h\left(-\frac{5}{3t_n^{\,2}}x_{n,1} + \frac{5}{3t_n}x_{n,2}\right) \end{cases}$$

c) Código en Matlab para aproximar la solución con el método de Euler mejorado, tomando el valor $a = 1$

```
%solución para a=1;
f=@(t,x) [x(2), -5*x(1)/(3*t^2)+5*x(2)/(3*t)];
nmax=5;h=0.2;
yeuler=eulermejsist (f,1,[1,2/3],h,nmax)
```

d) Solución exacta con `dsolve`, y representación gráfica

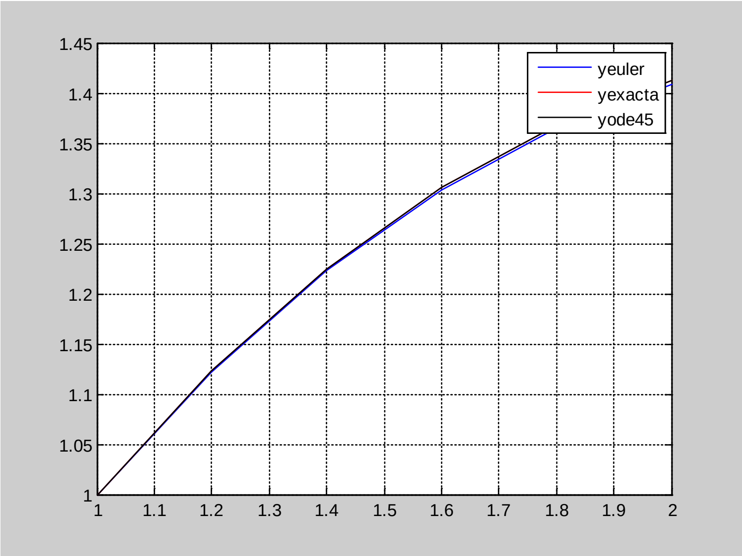
```
sol=dsolve('3*t^2*D2y-5*t*Dy+5*y=0','y(1)=1','Dy(1)=2/3')
%se obtiene sol =(3*t)/2 - t^(5/3)/2
vt=1:h:2;
syms t
yex=subs(sol,t,vt);
hold on
plot(vt,yex,'r')
```

e) Aproximación con `ode45` y representación gráfica

```
f1=@(t,x) [x(2); -5*x(1)/(3*t^2)+5*x(2)/(3*t)];
[t,yode]=ode45(f1,vt,[1,2/3]);
plot(t,yode(:,1),'k')
legend('yeuler','yexacta','yode45')
format long
```

Las gráficas de la solución exacta y de la aproximación obtenida con ode45se superponen.

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**



f) Resultados obtenidos para $a = 1$

n	t_n	aproximación Euler mejorado $y_n \left(= x_{n,1}\right)$	valor exacto $y(t_n)$	ode45
1	1.2	1.122222222222222	1.122454059205659	1.122454059380561
2	1.4	1.223139574759945	1.223974535605363	1.223974535650522
3	1.6	1.303836319049796	1.305615394126914	1.305615393852233
4	1.8	1.365203527537032	1.368245479861546	1.368245479125797
5	2	1.407992522282110	1.412598948031800	1.412598946717754

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Examen obligatorio - segunda parte (14/06/2017) Tiempo 1h.
Puntos: 20 sobre 40

EJERCICIO 1 **6 puntos**

Se considera el problema de valores en la frontera siguiente, definido en el intervalo $[2,4]$

$$y''(x) - \frac{x}{x-1}y'(x) + \frac{1}{x-1}y = 0\,,\quad y(2)=1\,,\ y(4)=e^2$$

Se aplicará el método de diferencias finitas para aproximar su solución en **tres** puntos intermedios. **Se pide:**

Escribe la fórmula de este método correspondiente al problema del enunciado para $N=3$. Con ella, genera el sistema de dimensión tres en las variables $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ y escríbelo en forma matricial. **No se utilizarán calculadoras.**

Ayuda para el Método de diferencias finitas:

Llamando N al número de puntos intermedios y w_k al valor aproximado de $y(x_k)$, este método genera un sistema algebraico de dimensión N en las incógnitas w_k. Cada ecuación de este sistema se construye con la fórmula:

$$\left(\frac{1}{h^2}-\frac{p(x_k)}{2h}\right)w_{k-1}+\left(\frac{-2}{h^2}+q(x_k)\right)w_k+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{p(x_k)}{2h}\right)w_{k+1}=r(x_k)$$

$k=1,2,\ldots,N$

Donde:

- $p(x),\ q(x),\ r(x)$ son los coeficientes de la ecuación diferencial
- $w_0=y(a),\quad w_{N+1}=y(b),\quad h=\dfrac{b-a}{N+1}$

Solución:

Fórmula para $N=3$:

$$\left(4+\frac{x_k}{x_k-1}\right)w_{k-1}+\left(-8+\frac{1}{x_k-1}\right)w_k+\left(4-\frac{x_k}{x_k-1}\right)w_{k+1}=0,\qquad k=1,2,3$$

Sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix}-22 & 7 & 0\\ 11 & -15 & 5\\ 0 & 27 & -38\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\ 0\\ -13e^2\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2 **10 puntos (2+4+1+3)**

Se considera la función

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

$$f(t)=\begin{cases}2, & 0\le t<6\\ 0, & 6\le t<9\\ e^{4t}, & t\ge 9\end{cases}$$

a) Comprueba que esta función satisface las condiciones suficientes de existencia de transformada de Laplace
b) Calcula la transformada de Laplace de $f(t)$, aplicando la definición.
c) Expresa $f(t)$ utilizando la función escalón unitario, $U(t)$.
d) Comprueba el resultado obtenido en el apartado b), utilizando la tabla y las propiedades de la transformada de Laplace.

Solución:

a) Teoría b) $\mathfrak{L}\left(f(t)\right)=\dfrac{2}{s}-\dfrac{2e^{-6s}}{s}+\dfrac{e^{-9(s-4)}}{s-4}, \quad s>4$

c) $f(t)=2U(t)-2U(t-6)+e^{4t}U(t-9)$

d) Se aplican las propiedades de traslación en s y en t:

$$\mathfrak{L}\left(f(t)\right)=2\mathfrak{L}\left(U(t)\right)-2e^{-6s}\mathfrak{L}\left(U(t)\right)+\mathfrak{L}\left(U(t-9)\right)_{s\to s-4}=$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{2e^{-6s}}{s}+\frac{e^{-9(s-4)}}{s-4}, \quad s>4$$

EJERCICIO 3 **4 puntos**

Calcular el área del paraboloide, $z=2-x^2-y^2$, situada entre los planos $z=0$ y $z=1$

Solución: $\acute{a}rea=\dfrac{\pi}{6}\left(27-5\sqrt{5}\right)$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE		
1.	1	$\dfrac{1}{s}, \quad s>0$
2.	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0, \quad n\ge 0$
3.	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot s^{-3/2}, \quad s>0$
4.	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}\cdot s^{-1/2}, \quad s>0$
5.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s>a$

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Examen opcional – recuperación primera parte (14/06/2017) Tiempo 75 min.
Puntos: 30+5

EJERCICIO 1 **12 puntos (3+6+3)**

a) Enuncia el teorema de Green en el plano.

b) Sea C la curva formada por la unión del cuadrante superior derecho de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ junto con el segmento recto que une los puntos $P(0,5)$ y $Q(5,0)$, tomados en este orden. Verifica el teorema de Green para el campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2, xy\right)$ y la curva C

c) Escribe el código en Matlab necesario para dibujar los siguientes elementos:

- La región encerrada por la curva C, usando el comando `fill`.
- Una muestra de vectores del campo $\mathbf{F}$ sobre la curva C.

Solución:

a) Teoría b) $\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(N'_x - M'_y\right) dA = -125/6$

EJERCICIO 2 **8 puntos (3+2+2+1)**

a) Calcula el jacobiano que relaciona el sistema de coordenadas cartesianas con el sistema de coordenadas esféricas.

b) Explica razonadamente qué superficies tienen por ecuación en coordenadas esféricas las sguientes:

a) $\rho = 3$ b) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ c) $\phi = \dfrac{\pi}{3}$

c) Encuentra el volumen del cubo esférico definido, en coordenadas esféricas, por el siguiente conjunto de puntos:

$$H = \left\{\left(\rho,\theta,\phi\right) / \rho_1 \le \rho \le \rho_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ \phi_1 \le \phi \le \phi_2\right\}$$

d) ¿Qué propiedad tiene que tener un cubo esférico para que sea simétrico respecto del plano $z = 0$

Solución:

a) Teoría b) Teoría c) $V = \dfrac{1}{3}\left(\rho_2^3 - \rho_1^3\right)\left(\cos\phi_1 - \cos\phi_2\right)\left(\theta_2 - \theta_1\right)$

d) $\phi_2 = \pi - \phi_1$

EJERCICIO 3 **5 puntos (4,5+0,5)**

a) Un alambre tiene la forma de la curva

$$x = t^2,\ \ y = t,\ \ z = t, \quad 0 \le t \le 2$$

Calcula la masa de este alambre si su de densidad en cada punto es igual a la distancia del punto al plano XY.

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

b) Escribe el código en Matlab para representar el alambre

Solución: a) $masa = 13\sqrt{2}/3$

EJERCICIO 4 **5 puntos**

Se consideran los campos

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad f = \|\mathbf{F}\|$$

demuestra que $\nabla(\log f) = \dfrac{\mathbf{F}}{f^2}$

PREGUNTA DE TEST **5 puntos**

Utilizando las propiedades de la integral doble, buscamos acotar la integral:

$$J = \iint_D e^{y \operatorname{sen} x} dA$$

donde D es el triángulo de vértices $(-1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$. Decir cuál de las siguientes acotaciones es correcta:

__ A) $0 \le J \le 5$

__ B) $\dfrac{1}{e} \le J \le e$

__ C) $\dfrac{3}{2e} \le J \le \dfrac{3e}{2}$

__ D) Ninguna de las anteriores.

Respuesta correcta C)

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

Examen opcional – recuperación segunda parte (14/06/2017) Tiempo 75 min.
Puntos: 30+5

EJERCICIO 1 **10 puntos** **(8+2)**

Un tanque de 400 litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de 150 litros de agua con 25 gramos de sal. Una solución salina de 2 gramos de sal en litro entra en el tanque a razón de 10 litros por minuto, mientras que la mezcla resultante sale por el sumidero a razón de 5 litros por minuto.

a) ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en el momento en que éste empieza a rebosar?

b) Escribe el código en Matlab para representar la variación de la sal en el tanque en los primeros 50 minutos.

Solución: a) $5575/8$ gramos

EJERCICIO 2 **10 puntos (9+1)**

a) Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{l} x' = -y + \dfrac{3}{2} \\ y' = 2x - 2t \end{array}\right\}, \qquad x(0)=0, \quad y(0)=1$$

b) Escribe el código en Matlab para resolver este problema en forma simbólica.

Solución: a) $x(t) = t - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right), \quad y(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)$

EJERCICIO 3 **10 puntos (9+1)**

a) Encuentra las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$x^2 + \left(y - C\right)^2 = C^2$$

b) Escribe el código en Matlab para representar dos curvas de esta familia pasando por los puntos (0,2) y (0,4) y dos curvas de la familia ortogonal pasando por (2,0) y (4,0).

Solución: a) $x^2 + y^2 - Cx = 0, \quad C \neq 0$

PREGUNTA DE TEST 5 puntos

Utilizamos el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular, $y_{1p}(x)$ y $y_{2p}(x)$ respectivamente, de cada una de las ecuaciones siguientes:

1) $y_1'' + 9y_1 = x\cos 3x$

2) $y_2'' + 6y_2' + 9y_2 = x\cos 3x$

Dichas soluciones particulares, cumplen,

Grado en Ingeniería Química

Ampliación de Cálculo **curso 2016-2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **núm**

__ A) $y_{1p}(x) = x(Ax+B)\cos 3x + x(Cx+D)\operatorname{sen} 3x$;

$y_{2p}(x) = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\operatorname{sen} 3x$

__ B) $y_{1p}(x) = x(Ax+B)\cos 3x + x(Cx+D)\operatorname{sen} 3x$;

$y_{2p}(x) = x(A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x)$

__ C) $y_{1p}(x) = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\operatorname{sen} 3x$;

$y_{2p}(x) = (Ax+B)\left(\cos 3x + \operatorname{sen} 3x\right)$

__ D) Ninguna de las anteriores son correctas.

Respuesta correcta A)

Grado en Ingeniería Química **curso 2016-2017**

Ampliación de Cálculo **Examen Septiembre: Parte 1 (3 puntos)** **11/09/2017**

Nombre: **SOLUCIÓN** **Núm.:**

En las siguientes preguntas se debe elegir una única opción correcta, justificando adecuadamente la opción elegida. **Todas las preguntas valen 0,5 puntos. Tiempo 1h 15 min**

Pregunta 1

Sea la lámina D que ocupa la región plana limitada por la parábola $x = y^2$ y por la recta $y = x - 2$. Sabiendo que la función densidad en cada punto es $\delta(x, y) = 3\ gr / cm^2$, puede asegurarse que la masa y la densidad media de la lámina verifican:

A) $\delta_{media} = 3\ gr / cm^2$, masa $= \frac{27}{2}\ gr$

B) $\delta_{media} = \frac{9}{2}\ gr / cm^2$, masa $= \frac{27}{2}\ gr$

C) $\delta_{media} = 3\ gr / cm^2$, masa $= 10\ gr$

D) Ninguna de las propuestas es correcta.

Pregunta 2

El área seccionada en el plano $x + y + z = 1$ por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, es:

A) $\sqrt{2}\,\pi$

B) π

C) $\sqrt{3}\,\pi$

D) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Pregunta 3

El flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{F} = (x, y, 0)$, hacia el exterior de la semiesfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, es:

A) $\frac{1}{3}\pi a^3$

B) $\frac{4}{3}\pi a^3$

C) 0

D) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Pregunta 4

Calcula la masa de una hélice dada por la ecuación $x = 5\cos t,\ y = 5\operatorname{sen} t,\ z = 4t$ con $t \in [0, 2\pi]$ sabiendo que la densidad en cada punto (x, y, z) es el cuadrado de la distancia al origen de coordenadas. El resultado es

A) $\sqrt{41}\left(50\pi - \frac{128}{3}\pi^3\right)$

B) $\sqrt{41}\left(50\pi + \frac{128}{3}\pi^3\right)$

C) $\sqrt{21}\left(50\pi+\dfrac{128}{3}\pi^3\right)$

D) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Pregunta 5

Elige de entre las siguientes ecuaciones las que sean homogéneas:

ecu1: $\left(y-x\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\right)dx+y\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}dy=0$;

ecu2: $\left(xy'-y\right)^2=x^2+y^2$

ecu3: $\left(2x^2-3y^2\right)dx+\left(y^2+5x^2-2\right)dy=0$;

ecu4: $y'=\left(\dfrac{y+x}{2y-x}\right)^2$

A) Todas menos ecu1
B) Todas menos ecu3
C) Todas menos ecu2
D) Todas son homogéneas.

Pregunta 6

Se considera la ecuación $y''+5y'-6y=R(x)$. Aplicamos el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución particular, $y_p(x)$, de esta ecuación.

- Afirmación 1: Si $R(x)=-e^x$, entonces se busca $y_p(x)=Axe^x$
- Afirmación 2: Si $R(x)=xe^x$, entonces se busca $y_p(x)=Ax^2e^x$
- Afirmación 3: Si $R(x)=2e^{5x}$, entonces se busca $y_p(x)=Ae^{5x}$
- Afirmación 4: Si $R(x)=e^x-4e^{5x}$, entonces se busca $y_p(x)=Axe^x+Be^{5x}$

A) La única falsa es la afirmación 4.

B) Todas las afirmaciones, de la 1 a la 4, son correctas.

C) La única falsa es la afirmación 2.

D) Ninguna de las afirmaciones, de la 1 a la 4, son correctas.

Grado en Ingeniería Química | **curso 2016-2017**

Ampliación de Cálculo | **Examen Septiembre: Parte 2 (5 puntos)** | **11/09/2017**

Nombre: **Núm.:**

Tiempo 1h 30min

Ejercicio 1 (1 punto)

Encuentra todas las soluciones de la ecuación $(x+y)dx+dy=0$, mediante el cambio de variable $z=x+y$.

Ejercicio 2 (0,5+0,5 puntos)

a) Explica cómo pueden ser las soluciones de la ecuación $y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$, siendo p y q números reales cualesquiera.

b) Explica en qué consiste el método de reducción de orden mediante el cual se determina una solución $y_2(x)$ de una ecuación del tipo $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ a partir de una solución $y_1(x)$, conocida. ¿Por qué se llama “método de reducción de orden”?

Ejercicio 3 (0,5+0,5+1+1 puntos)

a) Si $f(t)=U(t-1)-2U(t-3)$, calcula $f(2)$ y $f(4)$.

b) Si $F(s)$, definida para $s>a$, es la transformada de Laplace de $f(t)$, calcula la transformada de Laplace de $f(t-4)$.

c) Sabiendo que $\mathcal{L}\left(\operatorname{sen}^2 3t\right)=\dfrac{18}{s\left(s^2+36\right)}$, $s>0$, calcula si es posible, el valor de las siguientes integrales: a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{sen}^2 3t\,dt$ b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{t}\operatorname{sen}^2 3t\,dt$

d) Sabiendo que $\mathcal{L}\left(\cos 3t\right)=\dfrac{s}{s^2+9}$, $s>0$, calcula $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+3}{s^2+2s+10}\right)$

Grado en Ingeniería Química **curso 2016-2017**

Ampliación de Cálculo **Examen Septiembre: Parte 3 (2 puntos)** **11/09/2017**

Nombre: **Núm.:**

Deberás resolver este ejercicio con ayuda de Matlab. Al finalizar enviarás un único fichero, creado con el editor de Matlab, en el que escribirás tu nombre y apellidos en la primera línea y a continuación los comandos utilizados en la resolución del ejercicio, debiendo incluir líneas de comentario en los apartados. El nombre del fichero será las iniciales de tu nombre y tus dos apellidos, seguidos de la fecha "XXX11sept".

El envío se hará a través del enlace **"examen 11_09"**, que encontrarás en la página de la asignatura en Aula Virtual.

Tiempo: 55 min

Todos los apartados se califican con 0,5 puntos.

a) Dibuja la porción del plano $z=3$, correspondiente a $(x,y)\in[-1,2]\times[-2,1]$, coloreada según el campo escalar $g(x,y,z)=x+y^2-z$.

b) Dibuja 30 vectores del campo $\mathbf{F}=(-y,-x)$ sobre la curva de ecuaciones paramétricas $x=t\cos t,\;\; y=t\,\mathrm{sen}\,t,\;\; t\in[0,2\pi]$. Dibuja también la curva.

c) Dibuja 16 vectores del campo vectorial gradiente de $g(x,y,z)=xy+z^3$ en puntos de la superficie $z=x+y$, para $(x,y)\in[1,2]\times[1,2]$. Dibuja también la superficie.

d) Utiliza el comando `dsolve` para resolver el problema de valor inicial siguiente:

$$y''-xy'+y=x,\;\; y(0)=1,\;\; y'(0)=2$$

Escribe aquí los cálculos que hagas a mano:

```
%apartado a)
[X,Y]=meshgrid(-1:.2:2,-2:.2:1);
surf(X,Y,3*ones(size(X)),X+Y.^2-3);
shading interp

%apartado b)
t=linspace(0,2*pi,30);
x=t.*cos(t);
y=t.*sin(t);
plot(x,y);
hold on;
quiver(x,y,-y,-x);
hold off; axis tight; grid on

%apartado c)
[X,Y]=meshgrid(linspace(1,2,4));
Z=X+Y;
surf(X,Y,Z)
hold on
quiver3(X,Y,Z,Y,X,3*Z.^2);
hold off;axis tight

%apartado d)
y=dsolve('D2y-x*Dy+y=x','y(0)=1','Dy(0)=2','x')
```