Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

CIEM

Experiencias de Aula con Geogebra

Lógica con Geogebra

Elena Álvarez Sáiz

SOCIEDAD MATEMÁTICA DE PROFESORES DE CANTABRIA

Dpto. Matemática Aplicada
y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria

I

Índice

1

Introducción

- ¿Qué figura se representa en las siguientes imágenes?

- Si una persona mide 1’80 metros, ¿es alta?
- ¿Qué cantidad de dinero hay que tener para considerar que una persona es rica?
- ¿Qué significa levantar el pie ligeramente del embrague?
- ¿Qué temperatura debe haber para definir la sensación de frío?

2

Objetivos y contexto

Sesión Estalmat Cantabria

Objetivos

1. Descubrir que la vaguedad o borrosidad es una característica de nuestra realidad y de nuestras formas de razonar.
2. Describir matemáticamente los conceptos difusos.
3. Reconocer cómo variables lingüísticas (*muy*, *poco*, etc.) se pueden representar a través de transformaciones elementales de funciones.

Sesión completa

- Duración: 2 horas y media
- Alumnos veteranos de Estalmat
- Trabajan de forma individual o en parejas y se ponen en común los resultados

Desarrollo

- Parte I. Conjuntos difusos
- Parte II. Lógica difusa

Parte I

Conjuntos difusos

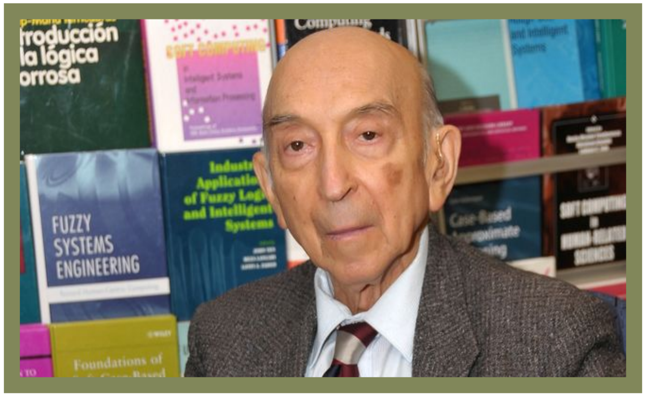
¿Es necesario introducir estos conjuntos?

- ¿Se pueden definir estos conceptos de forma "clásica"?

- **¿Qué es** un conjunto difuso?

  Mientras que en la teoría clásica se define la pertenencia de los distintos elementos a un conjunto haciéndoles corresponder el valor 1 si pertenecen y cero si no, en un conjunto difuso se ha de definir una función que asocie el grado de pertenencia al conjunto.

- Se practica con algunos ejemplos



Zadeh

4 Ejemplo

Parte I

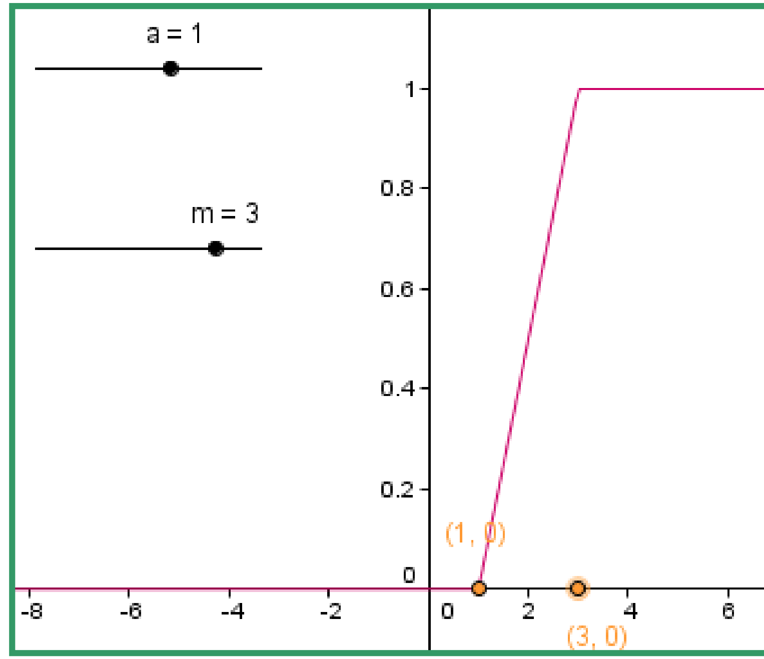
Números mucho mayores que 1

La función PERTENECE(x) deberá:

a) ser creciente

b) ser nula hasta poco después de 1

c) crecer pegada al eje de abscisas y no despegar de él hasta un lugar a convenir a partir del cual el crecimiento sea más rápido hasta llegar a otro lugar, también a convenir, en el que a partir de él valdrá 1.



Se construye con Geogebra la función de pertenencia

$$\text{PERTENECE}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le a\\ \dfrac{x-a}{m-a} & \text{si } a<x\le m\\ 1 & \text{si } x>m\end{cases}$$

4 Ejemplo **Parte I**

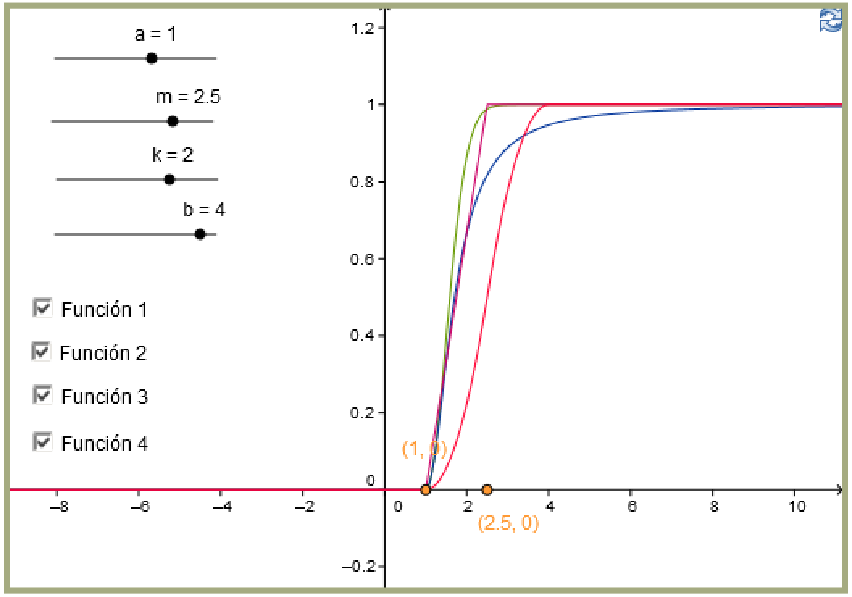
Números mucho mayores que 1

¿Hay otras posibilidades?

$$\mathrm{PERTENECE}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq a\\ 1-e^{-k(x-a)^2} & \text{si } x>a\end{cases}$$

$$\mathrm{PERTENECE}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq a\\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \text{si } a<x\end{cases}$$

$$\mathrm{PERTENECE}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq a\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & \text{si } a<x\leq m\\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \text{si } m<x<b\\ 1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$$



Se muestran las funciones viendo como influyen los parámetros

4 Ejemplos

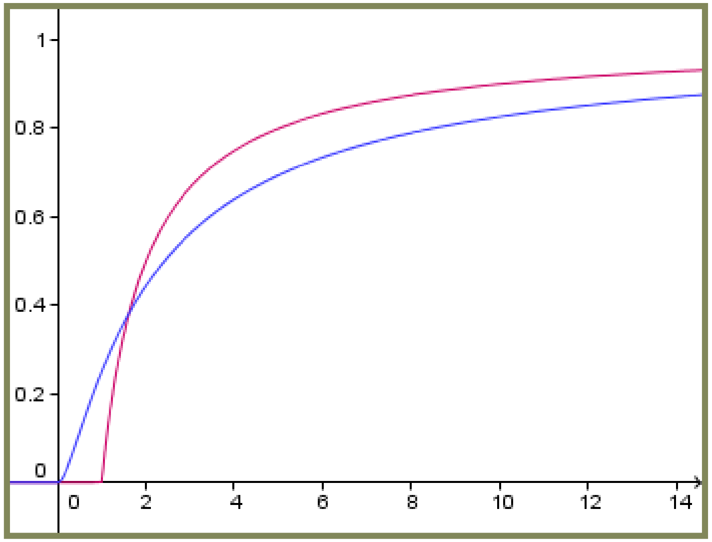
- Números próximos

$$\mathrm{PROXIMO}(x) = \frac{1}{1 + k(x-a)^2}$$

- Número natural grande

Se proponen distintas funciones de pertenencia

$$\mathrm{GRANDE}(n) = 1 - \frac{1}{n}$$



Se comprueba que con las definiciones que se han propuesto se puede deducir resultados.

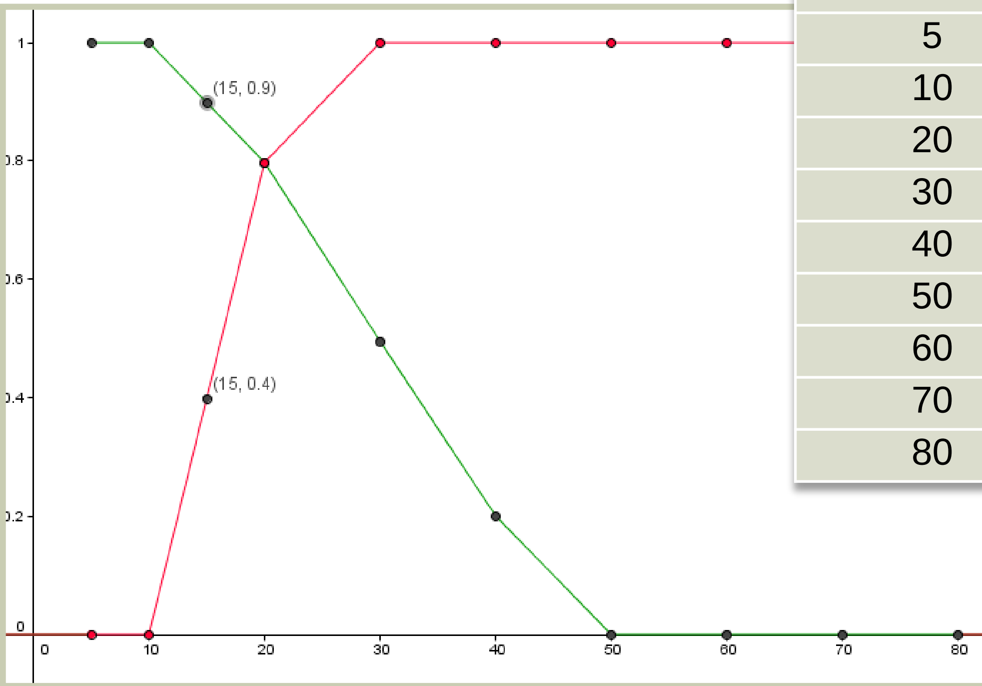
Si n es mayor que m y m es grande entonces n también lo es

4

Ejemplos

Parte I

Función poligonal

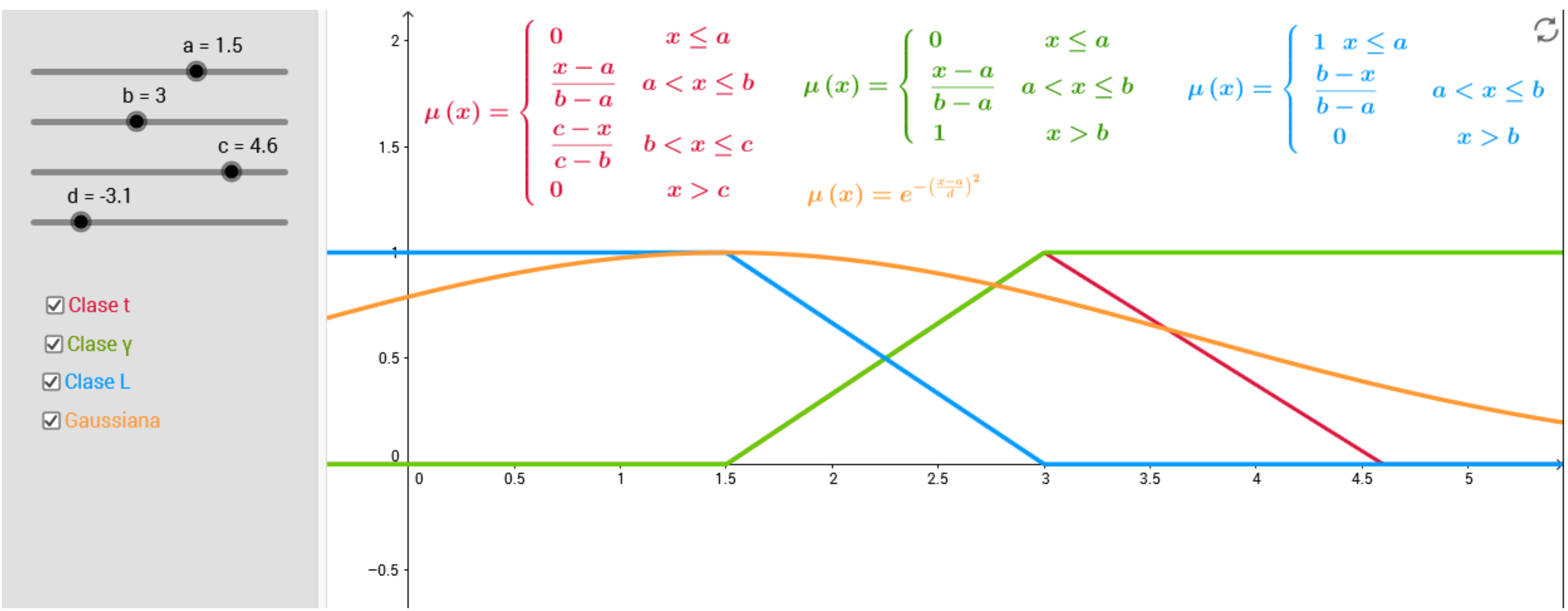


Elementos (Edad)	Bebé	Joven	Adulto	Viejo
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Se construye una función de pertenencia poligonal (suma de funciones a trozos)

4 Algunas funciones de pertenencia

Parte I

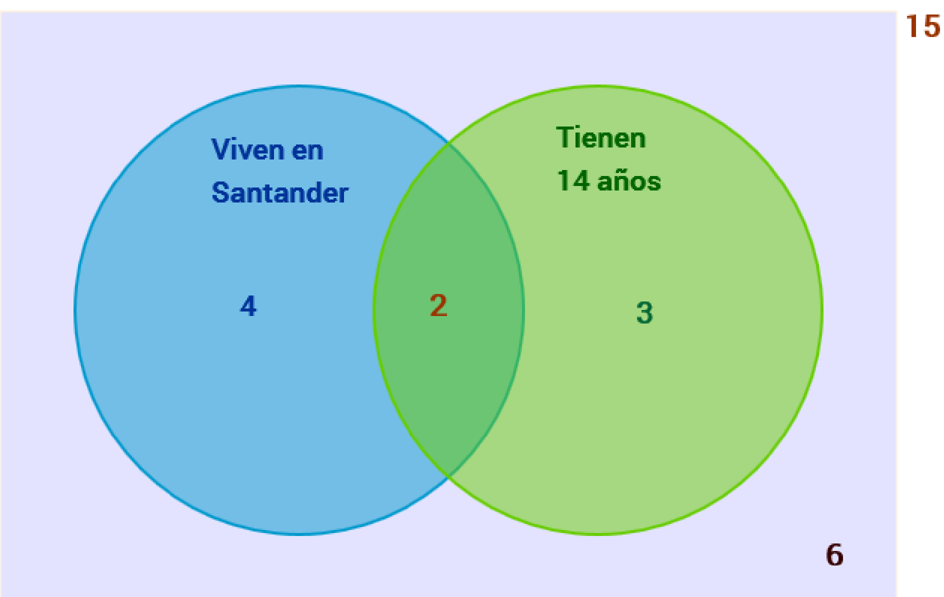


5

Operaciones entre conjuntos

Parte I

La unión, intersección y complementación de conjuntos clásicos



U = Estudiantes de Estalmat Cantabria
A = Estudiantes que viven en Santander
B= Estudiantes que tienen 14 años

- [ ] Estudiantes de Estalmat Cantabria **U**
- [ ] Estudiantes que viven en Santander **A**
- [ ] Estudiantes que tienen 14 años **B**
- [ ] Estudiantes que viven en Santander o tienen 14 años $A \cup B$
- [ ] Estudiantes que viven en Santander y tienen 14 años $A \cap B$
- [ ] Estudiantes que viven en Santander y no tienen 14 años $A \cap \overline{B}$
- [ ] Estudiantes de 14 años que no viven en Santander $\overline{A} \cap B$
- [ ] Estudiantes que no viven en Santander y no tienen 14 años $\overline{A} \cap \overline{B}$

CIEM

5

Operaciones entre conjuntos difusos

Parte I

Operaciones

Unión

- La unión difusa debe generalizar la unión clásica.
- Debe ser simétrica en el orden en el que se unen los conjuntos.
- Un decrecimiento en el grado de pertenencia en los conjuntos A y B no debe producir un aumento en el grado de pertenencia en AUB.
- La unión de un número de conjuntos se puede realizar en el orden que se desee.

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

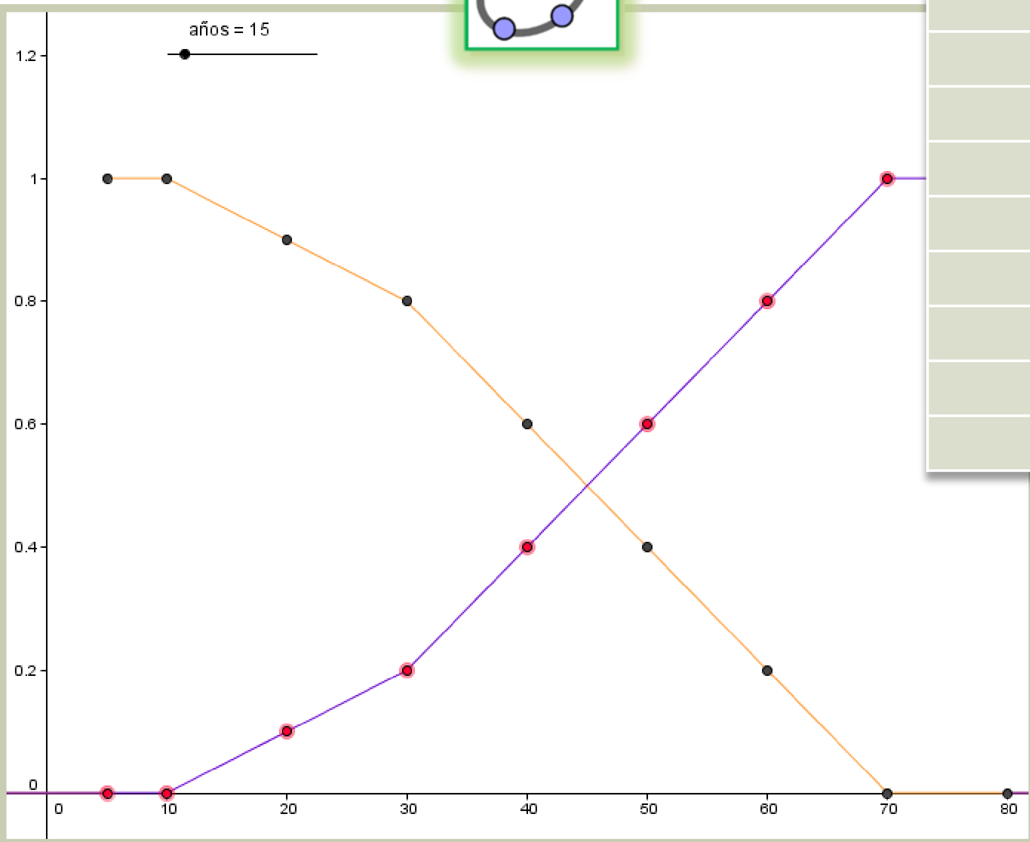
Intersección

- La intersección difusa debe generalizar la intersección clásica.
- Debe ser simétrica en el orden en el que se intersecten los conjuntos.
- Un decrecimiento en el grado de pertenencia en los conjuntos A y B no debe producir un aumento en el grado de pertenencia en AUB.
- La intersección de un número de conjuntos se puede realizar en el orden que se desee.

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

5 Operaciones entre conjuntos

Parte I



Elementos (Edad)	Bebé	Joven	Adulto	Viejo
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

6

Relaciones entre conjuntos

Parte I

Relación clásica

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \text{EEUU} & \text{Francia} & \text{Canada} & \text{Gran Bretaña} & \text{España} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{dólar} \\ \text{libra} \\ \text{franco} \\ \text{marco} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Inglés

Relación difusa

estaciones frías=
{(p, 0.3), (v, 0.1), (o, 0.4), (i, 0.9)}

sensación de frío =
{(T1, 0.4), (T2, 0.8)}

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{primavera} \\ \text{verano} \\ \text{otoño} \\ \text{invierno} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A\overset{\approx}{x}B = \left\{\left(a,b,\min\left(\mu_A\left(a\right),\mu_B\left(b\right)\right)\right) / a \in U, b \in V\right\}$$

6

Composición de relaciones difusas

Parte I

Relación R

$$\begin{array}{l} \\ \text{primavera} \\ \text{verano} \\ \text{otoño} \\ \text{invierno} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{T1} & \text{T2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Relación S

$$\begin{array}{l} \\ \text{T1} \\ \text{T2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{bañador} & \text{traje} & \text{abrigo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \text{primavera} \\ \text{verano} \\ \text{otoño} \\ \text{invierno} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{bañador} & \text{traje} & \text{abrigo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mu_{S \circ R}(u,w) = \max_{v \in V}\left(\min\left(\mu_R(u,v), \mu_S(v,w)\right)\right)$$

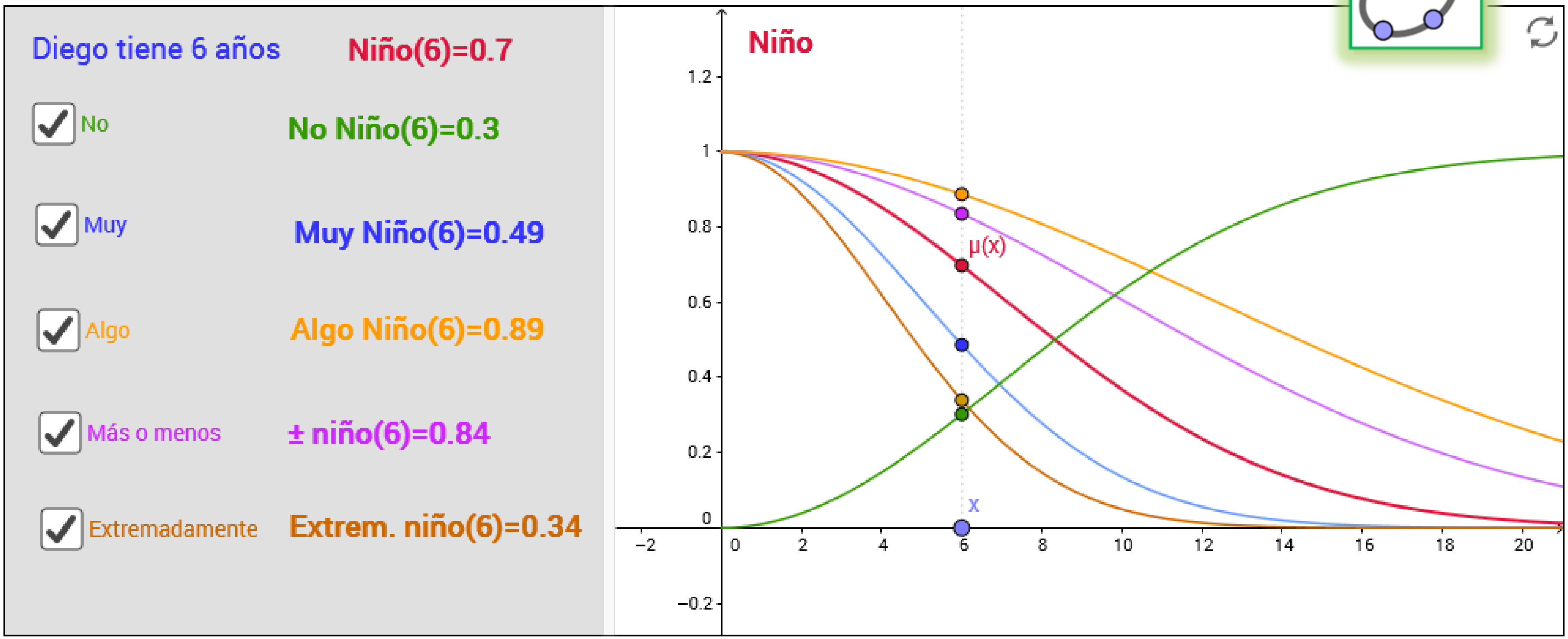
Parte II

Lógica difusa

7 Valores de verdad

Parte II

Casi cierto, muy cierto, algo falso…



Diego tiene 14 años. Valores de verdad:

Diego no es niño, Diego es muy niño, Diego es algo niño, Diego es más o menos niño…

8

Reglas difusas

Parte II

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

Conjunto	Definición
estaciones frías	{(p, 0.3), (v, 0.1), (o, 0.4), (i, 0.9)}
sensación de frío	{(T1, 0.4), (T2, 0.8)}
sensación de no frío	{(T1, 0.6), (T2, 0.2)}

Identificar el valor de verdad de esta regla como un conjunto difuso

8

Reglas difusas

Parte II

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

$$\left(\overset{\approx}{A} \to \overset{\approx}{B}\right) \vee \left(\overline{\overset{\approx}{A}} \to \overset{\approx}{C}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} \cup \begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mu_{A \to B} = \min(\mu_A, \mu_B)$$

Implicación de Mandani

$$\begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Valor de verdad de la regla

CIEM

8

Reglas difusas

Parte II

Modus ponens

Regla

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

Hecho

Estamos en una estación no muy fría

estaciones no muy fría={(p, 0.91), (v, 0.99), (o, 0.84), (i, 0.19)}

$$\begin{array}{cccc} p & v & o & i \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0.91 & 0.99 & 0.84 & 0.19 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Conclusión: Sensación de no mucho frío (sensación de no frío elevado a 1/3)

Inferencia difusa

Proceso de obtener un valor de salida para un valor de entrada empleando la teoría de conjuntos difusos.

Cuatro pasos:

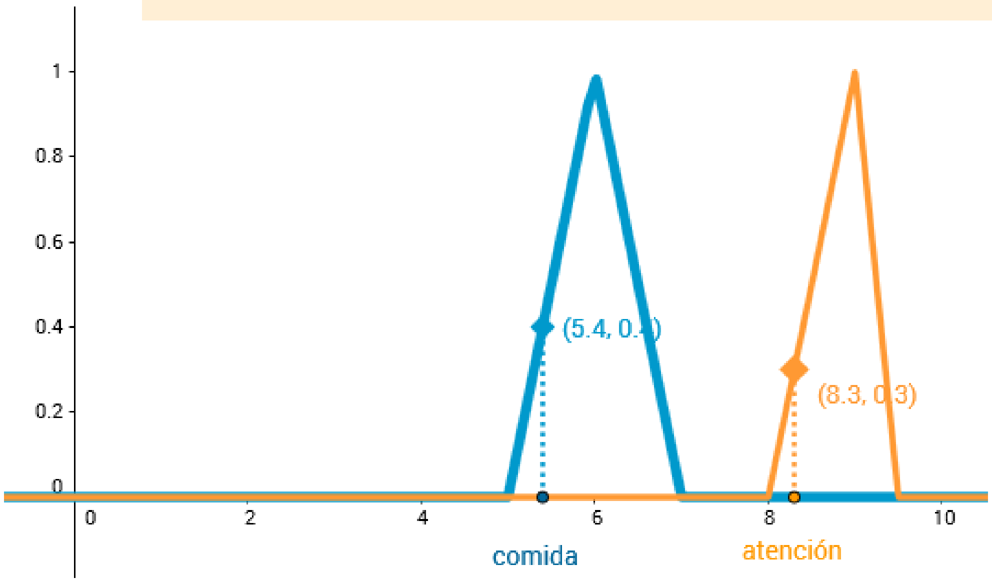
1. Fusificación de las variables de entrada
2. Evaluación de las reglas
3. Agregación de las salidas de las reglas
4. Defusificación

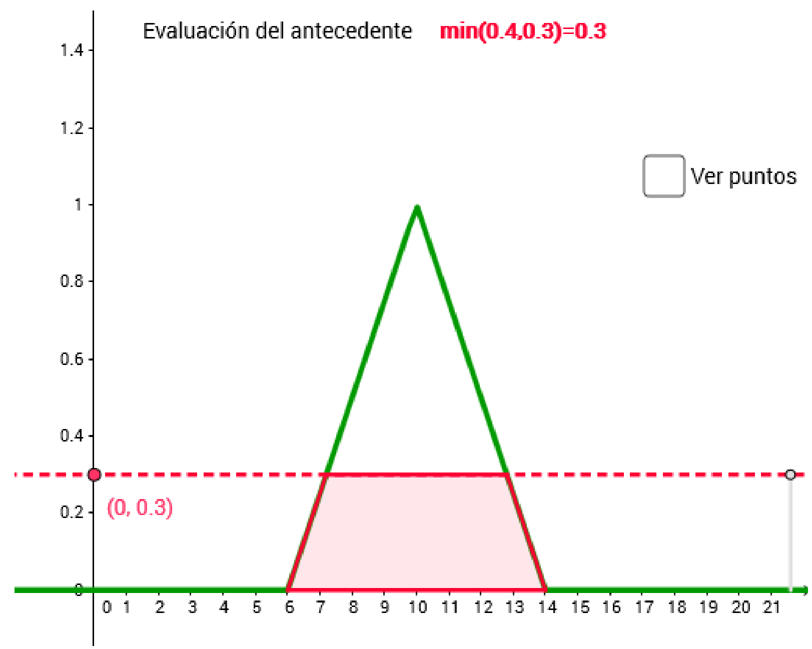
9

Inferencia difusa

Parte II

REGLA 1: Si la comida es buena y la atención es sobresaliente entonces la propina es alta





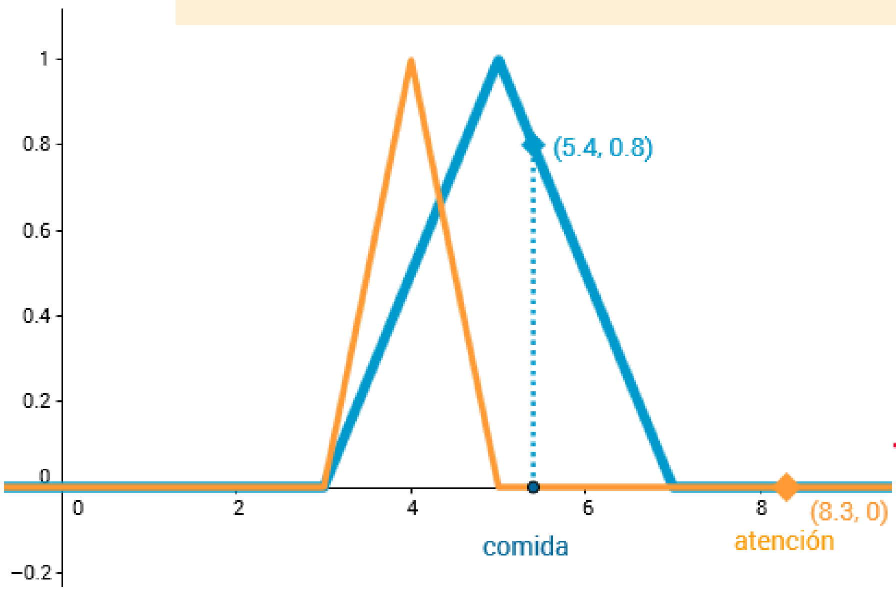
Recorte: Corta el consecuente con el valor de verdad

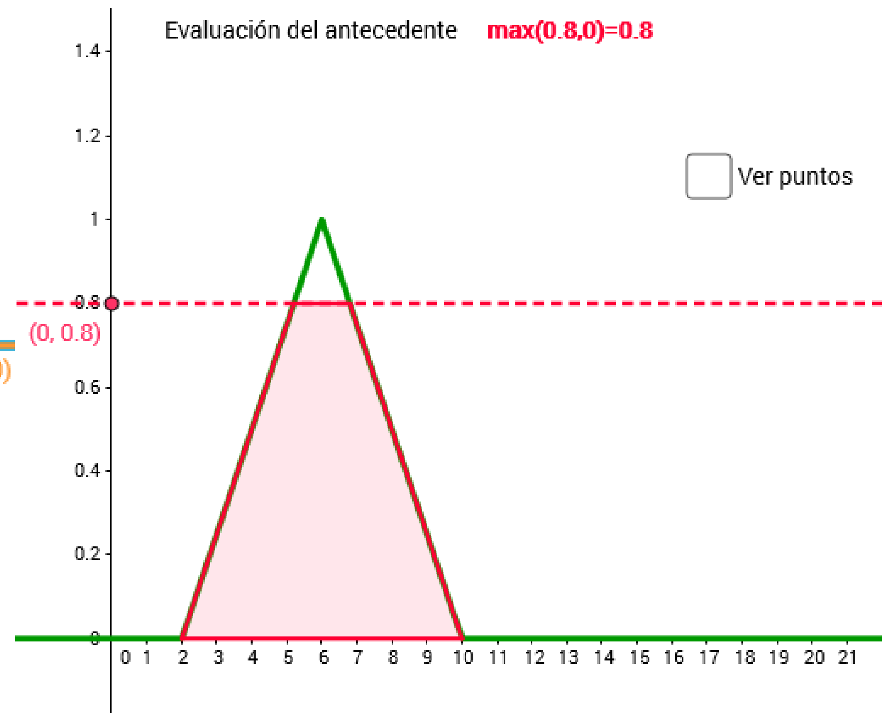
Escalado: Preserva la forma original del conjunto difuso

9

Control difuso

REGLA 2: Si la comida es normal o la atención es deficiente entonces la propina es baja



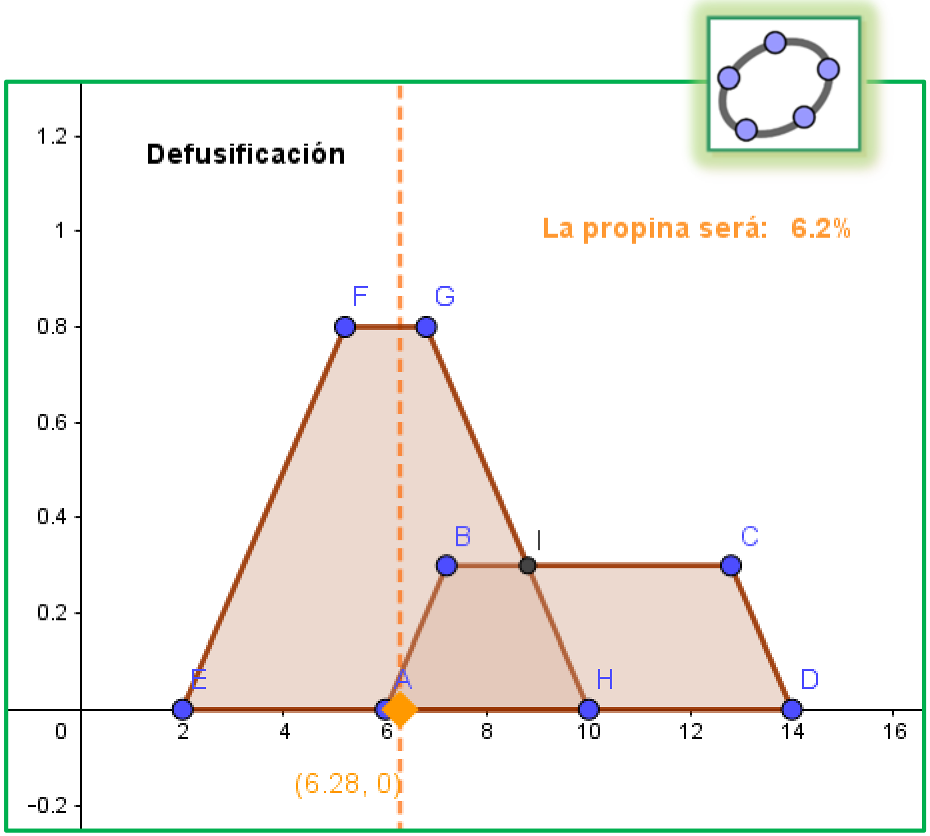


9

Inferencia difusa

Agregación: Cada regla obtiene un conjunto difuso. Se agrupan utilizando distintos método, uno de ellos es el máximo.

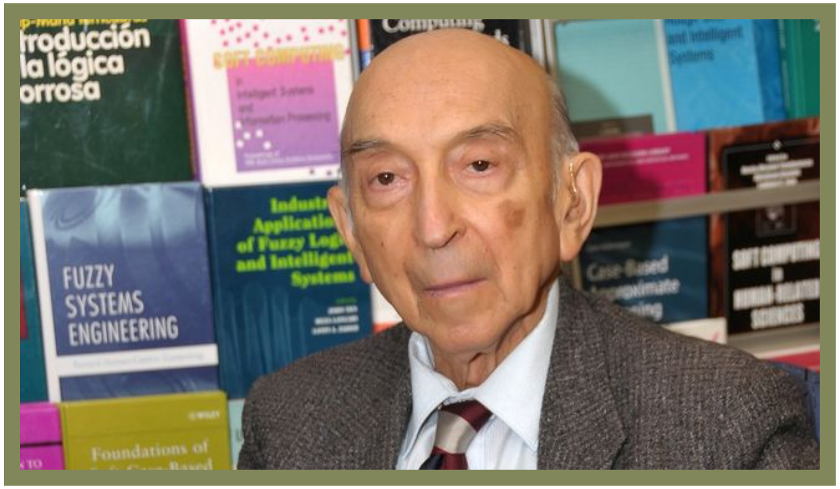
Defusificación Proceso matemático que convierte el conjunto difuso en un número. Un método utilizado es el centroide.



Conclusiones

Sobre los conjuntos difusos, las definiciones deben

1. **Ser consistentes con las definiciones paralelas de la teoría de conjuntos clásicos**, es decir, que ésta pueda considerarse como un caso particular de la teoría de conjuntos difusos
2. **reflejar razonablemente bien la realidad** y
3. **involucrar cálculos que sean sencillos** y, por tanto, se ejecuten con rapidez.



La lógica clásica es como quien va a una fiesta vestido con un traje negro, una camisa blanca almidonada, una corbata negra, zapatos lustrosos, etcétera. Y la lógica borrosa es un poco como quien va vestido informalmente con vaqueros, camiseta y zapatillas. En el pasado esta ropa informal no habría sido aceptable. Hoy es la otra manera que hay de vestir.

Zadeh, 1984

Conclusiones

Sobre la experiencia en el aula:

1. **Desarrollo:**
   - Valorar positivamente **el debate** que se genera a la hora de expresar características que deben tener las funciones de pertenencia.
   - Resulta de gran utilidad, facilitar a los alumnos **las escenas terminadas** ya que en algunos casos la construcción es repetitiva.
2. **Contenido matemático**
   - **Las funciones reales** constituyen la base del estudio realizado con los conjuntos difusos. Dado el nivel de los estudiantes, nos limitamos a trabajar con funciones triangulares o poligonales.
   - La definición de funciones a trozos mediante SI anidados en Geogebra les plantea dificultades.

Muchas gracias

Espero que la charla les haya resultado

algo interesante

Más información:
http://personales.unican.es/alvareze/otros.html