Prácticas Matlab

Práctica 8 (4/04/2017)

Objetivos

- Representar las isoclinas de una e.d.o. de primer orden como apoyo para trazar un campo de direcciones.
- Representar el campo de direcciones de una e.d.o. de primer orden y entender su significado.
- Representar las soluciones de una e.d.o. de primer orden.
- Utilizar representaciones gráficas para profundizar en el estudio de las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden.

Comandos de Matlab

1.- Para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden de forma simbólica

dsolve('eq', 'cond', 'var')

Ejemplos:

```
>>  dsolve('Dx = -a*x')
>>  dsolve('Dy = a*y', 'y(0) = b')
```

2.- Para definir funciones en línea

Con este comando se definen funciones en línea evaluables, de una o de varias variables.

```
F=@(x,y) eq
```

Ejemplo:

```
>> F=@(x,y) x.*y
```

2.- Para representar funciones implícitas

Para representar la función implícita definida por la ecuación $F(x,y)=0$ en la región del plano $[a,b]\times[a,b]$. $F(x,y)$ puede ser un string o una función en línea (función @)

```
ezplot
```

Ejemplo:

```
>> ezplot('x^2+y^2-4=0',[-2,2]) %utilizando un string

>> F=@(x,y) x.^2+y.^2-4;
>> ezplot(F,[-2,2]) %utilizando una función en línea
```

Isoclinas y campos de direcciones

Definición de isoclina.- Dada una e.d.o. $y' = f(x, y)$, se llama isoclina al lugar geométrico de los puntos del plano donde la pendiente de las curvas solución es constante, siendo su ecuación $f(x, y) = C$.

Campo de direcciones.- Dada una e.d.o. $y' = f(x, y)$, se llama campo de direcciones a la representación gráfica de una muestra de pequeños segmentos de rectas tangentes a las curvas solución, dibujados sobre los puntos de corte de éstas con las isoclinas.

Ejercicios

1

Representación de isoclinas y campos de direcciones

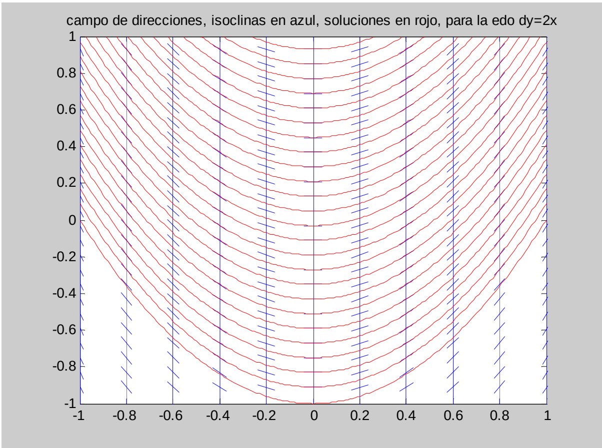
a) Busca todas las funciones $y = y(x)$ que cumplen que $y' = 2x$. Debes obtener una familia uniparamétrica de curvas (esto es lo que se llama solución general de la ecuación).

b) Si no fuera tan sencillo encontrar la familia de soluciones, una herramienta que facilita el estudio de su comportamiento es el método de las isoclinas y el dibujo del campo de direcciones.

En la figura que se facilita, se han representado el campo de direcciones y una muestra de isoclinas y de soluciones de la ecuación $y' = 2x$, en el cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$. Escribe el código necesario para reproducir de forma aproximada esta figura.

Resolución

Este es el ejercicio propuesto nº 6 del tema 4.



Apartado a)

Resulta inmediato comprobar que la solución general de esta ecuación diferencial es

$$y = x^2 + C$$

Puedes encontrar esta solución, ejecutando el siguiente comando en Matlab

```
dsolve('Dy=2x','x')
```

Apartado b)

- La ecuación de las isoclinas es

$$y' = m \quad \to \quad 2x = m \quad \to \quad x = \frac{m}{2}$$

Las rectas verticales de la figura, corresponden a las isoclinas de pendientes

$$m = \{-2, -1.6, -1.2, -0.8, \dots, 2\}$$

El código para dibujar estas isoclinas podría ser

```
%Representación de las isoclinas
hold on %para dibujar todas las isoclinas en la misma figura
y=[-1,1]; %valores de y para dibujar la recta que pasa por los
% puntos (x,-1) y (x,1)
for m=-2:0.4:2 %valores de las pendientes
    x=m/2;%ecuación de las isoclinas
    plot([x,x],y)%dibujo de las isoclinas
end
```

- La constante C de la familia para cada punto de paso, (x_0, y_0), es

$$C = y_0 - x_0^2$$

Por lo tanto la ecuación de las soluciones particulares, en función de este punto de paso es

$$y = x^2 + (y_0 - x_0^2)$$

En la figura se han representado 25 soluciones que pasan por puntos igualmente espaciados del eje OY, en el intervalo $[-1,1]$. La ecuación de estas soluciones, que pasan por $(0, y_0)$, es

$$y = x^2 + y_0$$

Código para dibujar estas soluciones:

```
%representación de las soluciones
x=linspace(-1,1,30);
for y0=linspace(-1,1,26)%puntos de paso en el eje OY
    y=x.^2+y0;%ecuación de las soluciones que pasan por (0,y0)
    plot(x,y,'r')%dibujo de las soluciones
end
axis([-1 1 -1 1])%muestra las soluciones en el cuadrado
%[-1,1]x[-1,1]
```

- A continuación se muestra un código sencillo para representar un mapa de direcciones de la ecuación $y' = 2x$.

Representaremos vectores tangentes a las curvas solución en cada punto de una rejilla del plano. Las componentes de estos vectores son, en cada punto, $(1, y')$. Eliminaremos la flecha del vector dibujado para que no aparezcan flechas en el mapa de direcciones.

```
%campo de direcciones representado con vectores (1,y')
f=@(x,y) 2*x;%definición de la derivada en cualquier punto (x,y)
[u,v]=meshgrid(-1:0.1:1);%rejilla de puntos para dibujar los
%vectores tangentes a las curvas solución que pasan por dichos
%puntos
du=ones(size(u));%primera componente del vector tangente
dv=f(u,v);%segunda componente del vector tangente
q=quiver(u,v,du,dv)
set(q,'ShowArrowHead','off')%para quitar la flecha del vector
hold off
```

2

Representación de isoclinas y campos de direcciones

Se facilitan las figuras donde se han diujado una muestra del campo de direcciones, de isoclinas y de soluciones, para las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $y' = xy$ 2) $y' = x + y$ 3) $y' = x^2 - y$

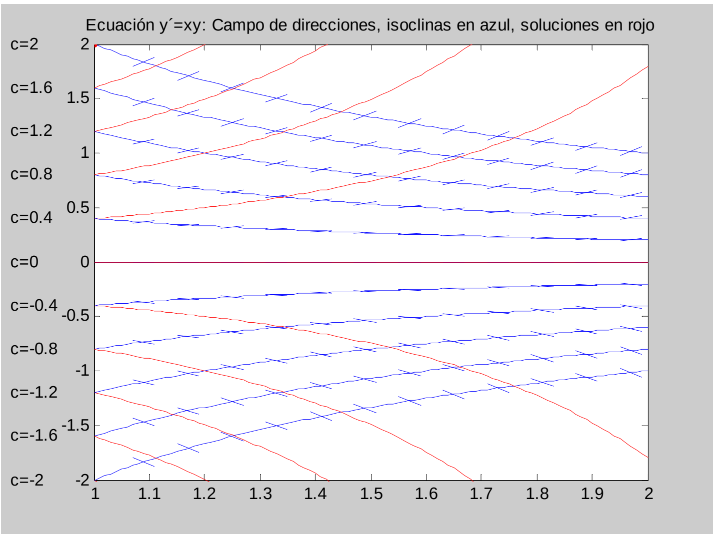
a) Siguiendo el modelo del ejercicio anterior, escribe el código necesario para reproducir de forma aproximada estas figuras.

b) Haz un estudio de la monotonía y la concavidad de las curvas solución y comprueba que concuerda con la representación que has hecho en el apartado anterior.

Resolución

Este es el ejercicio propuesto nº 8 del tema 4.

1) Ecuación $y' = xy$



- La ecuación de las isoclinas es

$$y' = m \quad \rightarrow \quad xy = m \quad \rightarrow \; y = \frac{m}{x}, \quad x \neq 0$$

Se trata de una familia de hipérbolas. Los arcos de curva representados en la figura en color azul, corresponden a las isoclinas de pendientes

$$m = \{-2, -1.6, -1.2, -0.8, \ldots, 2\}$$

representadas en el intervalo $[1,2]$. El código para dibujar estas isoclinas podría ser

```
%Representación de las isoclinas
hold on %para dibujar todas las isoclinas en la misma figura
x=linspace(1,2,30); %valores de x para dibujar las isoclinas
for m=-2:0.4:2 %valores de las pendientes
    y=m./x;%ecuación de las isoclinas
    plot(x,y)%dibujo de las isoclinas
end
```

- La solución de la ecuación la obtenemos escribiendo en matlab,

```
dsolve('Dy=x*y','x')
```

se obtiene la familia uniparamétrica, $y = Ce^{x^2/2}$

- La constante C de la familia para cada punto de paso, (x_0, y_0), es

$$C = y_0 e^{-x_0^2/2}$$

Por lo tanto la ecuación de las soluciones particulares, en función de este punto de paso es

$$y = y_0 e^{\left(x^2 - x_0^2\right)/2}$$

En la figura se han dibujado 9 soluciones particulares. Si tomamos como puntos de paso, los puntos de la forma $(1, y_0)$, la ecuación de las soluciones es

$$y = y_0 e^{\left(x^2 - 1\right)/2}$$

El Código para dibujar estas soluciones en la ventana $[1,2] \times [-2,2]$ es:

```
%representación de las soluciones
x=linspace(1,2,30);
for y0=linspace(-2,2,11)%puntos de paso en x0=1, las soluciones
      %que pasan por (1,-2) y por (1,2) no se ven en la figura.
    y=y0*exp((x.^2-1)/2);%ecuación de las soluciones que pasan
    %por (1,y0)
    plot(x,y,'r')%dibujo de las soluciones
end
%axis equal
axis([1 2 -2 2]) %muestra el rectángulo [1,2]x[-2,2]
```

- A continuación se representa un mapa de direcciones de la ecuación $y' = xy$, mediante vectores tangentes a las curvas solución en los puntos de una malla construida sobre el rectángulo `[1,2]x[-2,2]`.

```
%campo de direcciones representado con vectores (1,y')
f=@(x,y) x.*y;%definición de la derivada en cualquier punto (x,y)
[u,v]=meshgrid(1:0.1:2,-2:0.1:2);%rejilla de puntos para dibujar
%los vectores tangentes a las curvas solución que pasan por dichos
%puntos
du=ones(size(u));%primera componente del vector tangente
dv=f(u,v);%segunda componente del vector tangente
q=quiver(u,v,du,dv)
set(q,'ShowArrowHead','off')%para quitar la flecha del vector
hold off
```

- Estudio de la monotonía y extremos

Las soluciones son crecientes si $y' \geq 0 \;\rightarrow\; xy \geq 0 \;\rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \;\; e \;\; y \geq 0 & (1C) \\ x \leq 0 \;\; e \;\; y \leq 0 & (3C) \end{cases}$

y son decrecientes si $y' \leq 0 \;\rightarrow\; xy \leq 0 \;\rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \;\; e \;\; y \geq 0 & (2C) \\ x \geq 0 \;\; e \;\; y \leq 0 & (4C) \end{cases}$

Para estudiar los extremos hacemos, $y' = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$y = 0$, es solución de la ecuación diferencial y puesto que se cumple el teorema de existencia y unicidad no puede haber ninguna otra solución que corte a $y = 0$, por lo tanto no existen extremos en este eje.

$x = 0$, no es solución de la ecuación diferencial luego las soluciones tienen sus extremos este eje: máximos si $y < 0$, mínimos si $y > 0$

- Estudio de la concavidad y puntos de inflexión.

Las soluciones son cóncavas si, $y'' \geq 0$ y convexas si, $y'' \leq 0$. La derivada segunda es

$$y'' = y + xy' = y + x^2 y = y(x^2 + 1)$$

por lo tanto,

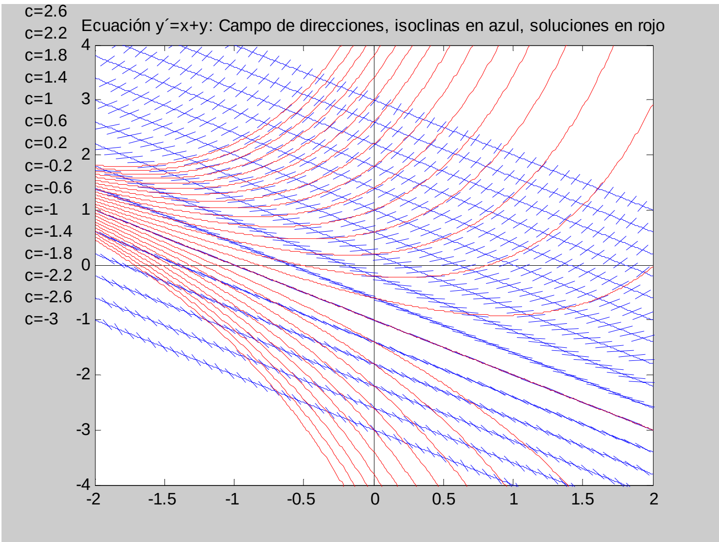
$$y'' \geq 0 \;\rightarrow\; y \geq 0$$
$$y'' \leq 0 \;\rightarrow\; y \leq 0$$

Es decir, las soluciones son cóncavas en el semiplano $y \geq 0$ y son convexas en el semiplano $y \leq 0$.

Como se ha dicho antes, $y = 0$ es solución de la ecuación diferencial por lo tanto las restantes soluciones no la cortan y no cambian de cóncavas a convexas o al revés sino que son siempre cóncavas o siempre convexas.

Todas estas conclusiones se reflejan en el campo de direcciones que se ha representado en una región del primer y cuarto cuadrantes.

2) Ecuación $y' = x + y$



- La ecuación de las isoclinas es

$$y' = m \quad \to \quad x + y = m \quad \to \quad y = m - x$$

Se trata de una familia de rectas. Las rectas representadas en la figura, corresponden a las isoclinas de pendientes

$$m = \{-3, -2.6, -2.2, -1.8, \ldots, 3\}$$

dibujadas en el intervalo $[-2, 2]$. El código para dibujar estas isoclinas podría ser

```
%Representación de las isoclinas
hold on %para dibujar todas las isoclinas en la misma figura
x=[-2,2]; %valores de x para dibujar las isoclinas
for m=-3:0.4:3 %valores de las pendientes
    y=m-x;%ecuación de las isoclinas
    plot(x,y)%dibujo de las isoclinas
end
axis([-2 2 -4 4]) %muestra las isoclinas en el rectángulo
%[-2,2]x[-4,4]
```

- La solución de la ecuación la obtenemos escribiendo en matlab,

```
dsolve('Dy=x+y','x')
```

se obtiene la familia uniparamétrica, $y = Ce^{x} - x - 1$

La constante C de la familia para cada punto de paso, (x_0, y_0), es

$$C = (y_0 + x_0 + 1)e^{-x_0}$$

Por lo tanto la ecuación de las soluciones particulares, en función de este punto de paso es

$$y = (y_0 + x_0 + 1)e^{x - x_0} - x - 1$$

Tomamos como puntos de paso, los puntos de la forma $(0, y_0)$, la ecuación de las soluciones es

$$y = (y_0 + 1)e^x - x - 1$$

Dibujaremos estas soluciones en la ventana $[-2,2]\times[-4,4]$ tomando puntos de paso para $y_0 \in [-5,5]$, distanciados 0.4

```
%representación de las soluciones
x=linspace(-2,2,30);
for y0=-5:0.4:5 %puntos de paso en el eje OY
    y=(y0+1)*exp(x)-x-1;%ecuación de las soluciones que pasan
    %por (0,y0)
    plot(x,y,'r')%dibujo de las soluciones
end
```

- A continuación se representa un mapa de direcciones de la ecuación $y' = x + y$, mediante vectores tangentes a las curvas solución en los puntos de una malla construida sobre el rectángulo `[-2,2]x[-4,4]`.

```
%campo de direcciones representado con vectores (1,y')
f=@(x,y) x+y;%definición de la derivada en cualquier punto (x,y)
[u,v]=meshgrid(-2:0.2:2,-4:0.2:4);%rejilla de puntos para dibujar
%los vectores tangentes a las curvas solución que pasan por dichos
%puntos
du=ones(size(u));%primera componente del vector tangente
dv=f(u,v);%segunda componente del vector tangente
q=quiver(u,v,du,dv)
set(q,'ShowArrowHead','off')%para quitar la flecha del vector
hold off
```

- Estudio de monotonía y extremos.

Las soluciones son crecientes si $y' \geq 0 \ \rightarrow\ x + y \geq 0 \ \rightarrow y \geq -x$
y son decrecientes si $y' \leq 0 \ \rightarrow\ x + y \leq 0 \ \rightarrow y \leq -x$

La recta $y = -x$, divide el plano en dos regiones. A la derecha de dicha recta las soluciones son crecientes y a la izquierda son decrecientes. Además en los puntos de esta recta las soluciones toman sus valores mínimos ya que pasan de decrecientes a crecientes. Para hacer esta afirmación comprobamos que se cumple el teorema de existencia y unicidad y que la recta $y = -x$ no es solución de la ecuación diferencial, lo que implica que las soluciones la cortarán.

- Estudio de la concavidad y los puntos de inflexión.

Las soluciones son cóncavas si, $y'' \geq 0$ y convexas si, $y'' \leq 0$. La derivada segunda es

$$y'' = 1 + y' = 1 + x + y$$

por lo tanto,

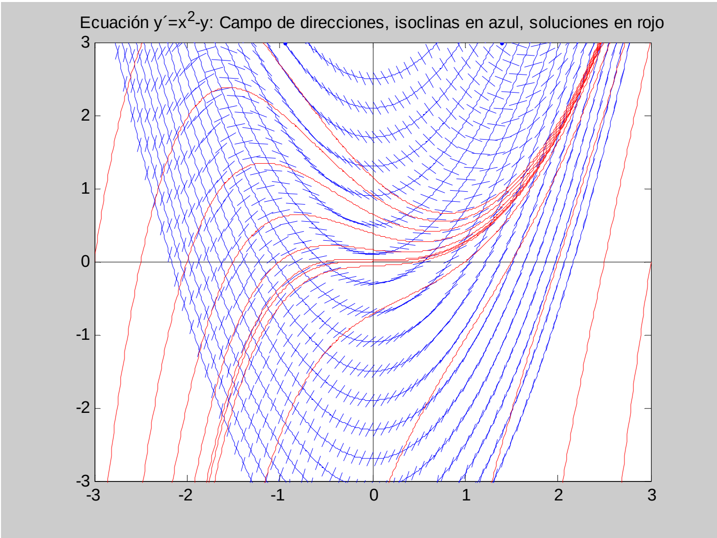
$$y'' \geq 0 \ \rightarrow\ 1 + x + y \geq 0 \ \rightarrow y \geq -x - 1$$
$$y'' \leq 0 \ \rightarrow\ 1 + x + y \leq 0 \ \rightarrow y \leq -x - 1$$

Es decir, las soluciones son cóncavas en el semiplano $y \geq -x - 1$ y son convexas en el semiplano $y \leq -x - 1$.

La recta $y=-x-1$, divide el plano en dos regiones. A la derecha de dicha recta las soluciones son cóncavas y a la izquierda son convexas, sin embargo las soluciones no pasan de convexas a cóncavas cruzando esta recta, ya que dicha recta es solución y al cumplirse el teorema de existencia y unicidad no la pueden cruzar, de lo que se deduce que las soluciones son siempre cóncavas o si empre convexas.

En el campo de direcciones representado en la figura, se confirman las conclusiones del estudio de monotonía y concavidad.

3) Ecuación $y' = x^2 - y$



- La ecuación de las isoclinas es

$$y' = m \quad \rightarrow \quad x^2 - y = m \quad \rightarrow \quad y = x^2 - m$$

Se trata de una familia de parábolas. Los arcos de éstas parábolas, representados en la figura, corresponden a las isoclinas de pendientes

$$m = \{-2.5, \, -2, \, -1.5, \, -1, \ldots, 5\}$$

dibujadas en el intervalo $[-3,3]$. El código para dibujar estas isoclinas podría ser

```
%Representación de las isoclinas
hold on %para dibujar todas las isoclinas en la misma figura
x=linspace(-3,3,30); %valores de x para dibujar las isoclinas
for m=-2.5:0.5:5 %valores de las pendientes
    y=x.^2-m;%ecuación de las isoclinas
    plot(x,y)%dibujo de las isoclinas
end
axis([-3 3 -3 3]) %muestra las isoclinas en el cuadrado
%[-3,3]x[-3,3]
```

- La solución de la ecuación la obtenemos escribiendo en matlab,

```
dsolve('Dy=x^2-y','x')
```

se obtiene la familia uniparamétrica, $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$

La constante C de la familia para cada punto de paso, (x_0, y_0), es

$$C = (y_0 - x_0^2 + 2x_0 - 2)e^{x_0}$$

Por lo tanto la ecuación de las soluciones particulares, en función de este punto de paso es

$$y = (y_0 - x_0^2 + 2x_0 - 2)e^{x_0 - x} + x^2 - 2x + 2$$

Tomando como puntos de paso puntos de la forma $(x_0, 0)$, la ecuación de las soluciones es

$$y = (-x_0^2 + 2x_0 - 2)e^{x_0 - x} + x^2 - 2x + 2$$

Dibujaremos estas soluciones en la ventana $[-3,3]\times[-3,3]$ tomando puntos de paso para $x_0 \in [-3,3]$, distanciados 0.4 Para que sirva de ejemplo para los casos en los que no dispongamos de la ecuación explícita de las soluciones, dibujaremos las curvas de forma implícita, utilizando el comando `ezplot`.

```
%representación de las soluciones en forma implícita con ezplot
for x0=-3:0.5:3 %puntos de paso en el eje OX
    F=@(x,y) y-(-x0^2+2*x0-2)*exp(x0-x)-x.^2+2*x-2;%ecuación de
    las soluciones que pasan %por (x0,0)
    ezplot(F)%dibujo de las soluciones en forma implícita
end
```

- A continuación se representa un mapa de direcciones de la ecuación $y' = x^2 - y$, mediante vectores tangentes a las curvas solución en los puntos de una malla construida sobre el rectángulo `[-3,3]x[-3,3]`.

```
%campo de direcciones representado con vectores (1,y')
f=@(x,y) x.^2-y;%definición de la derivada en cualquier punto (x,y)
[u,v]=meshgrid(-3:0.15:3);%rejilla de puntos para dibujar
%los vectores tangentes a las curvas solución que pasan por dichos
%puntos
du=ones(size(u));%primera componente del vector tangente
dv=f(u,v);%segunda componente del vector tangente
q=quiver(u,v,du,dv)
set(q,'ShowArrowHead','off')%para quitar la flecha del vector
hold off
```

- Estudio de monotonía y extremos.

Las soluciones son crecientes si $y' \geq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - y \geq 0 \quad \rightarrow y \leq x^2$

y son decrecientes si $y' \leq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - y \leq 0 \quad \rightarrow y \geq x^2$

La parábola $y = x^2$, divide el plano en dos regiones. En la región exterior a la parábola las soluciones son crecientes y en la región interior son decrecientes. Además, al cumplirse el teorema de existencia y unicidad y la parábola no ser solución de la ecuación diferencial, los puntos de esta parábola corresponden a valores mínimos de las soluciones cuando pasan de decrecientes a crecientes y a valores máximos cuando pasan de crecientes a decrecientes.

- Estudio de la concavidad y los puntos de inflexión.

  Las soluciones son cóncavas si, $y'' \geq 0$ y convexas si, $y'' \leq 0$. La derivada segunda es

$$y'' = 2x - y' = 2x - x^2 + y$$

  por lo tanto,

$$y'' \geq 0 \;\rightarrow\; 2x - x^2 + y \geq 0 \;\rightarrow y \geq x^2 - 2x$$
$$y'' \leq 0 \;\rightarrow\; 2x - x^2 + y \leq 0 \;\rightarrow y \leq x^2 - 2x$$

  Es decir, las soluciones son cóncavas en la región interior a la parábola $y = x^2 - 2x$ y son convexas en la región exterior a dicha parábola. Además, puesto que esta parábola no es solución de la ecuación diferencial, todos sus puntos son puntos de inflexión de las soluciones ya que pasan de cóncavas a convexas o viceversa.

  El campo de direcciones representado confirma las conclusiones del estudio de monotonía y concavidad.

Resumen de comandos

Se recogen aquí los comandos utilizados en esta práctica que se darán por conocidos en las prácticas siguientes y que conviene retener porque se podrán preguntar en las distintas pruebas de evaluación. También se supondrán conocidos los comandos que fueron utilizados en prácticas anteriores y en las prácticas de Cálculo I.

- Para resolver ecuaciones diferenciales: `dsolve`
- Para crear funciones en línea `@`
- Para representar funciones implícitas: `ezplot`