Prácticas Matlab

Práctica 5 (7/03/2017)

Objetivos

- Dibujar una muestra de un campo vectorial sobre una curva.
- Profundizar en el estudio de algunas aplicaciones físicas de la integral de línea de un campo vectorial: flujo y circulación.
- Utilizar representaciones gráficas como ayuda para entender las definiciones y las propiedades de la integral de línea de un campo vectorial.

Ejercicios

1

Flujo a través de una curva plana.

Sea $\mathbf{V}(x,y)=(x+1)^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ el campo de velocidades de un fluido y *C* la circunferencia de radio R centrada en el origen.

a) Representa la circunferencia y el campo $\mathbf{V}$ en ocho puntos repartidos uniformemente sobre ella.
Puedes hacerlo más general preparando una función que dependa del número de puntos donde se quiera dibujar el campo y del radio de la circunferencia.

b) El flujo saliente total de un campo vectorial $\mathbf{V}$ viene dado por

$$\oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario de C, que apunta hacia fuera. Calcula el flujo saliente total para el campo de este ejercicio y confirma que el resultado es coherente con el campo representado en el apartado anterior.

c) Dibuja con Matlab una muestra de la componente normal del vector velocidad en los puntos donde dibujaste el campo, utilizando otro color.

d) Calcula la circulación de **V** y dibuja, en la misma figura y en otro color, las componentes tangenciales del campo sobre C en los mismos puntos.

Resolución

Este es el ejercicio propuesto nº19 del tema 2.

Apartado a)

Haz la representación tomando $R=1$ y utlizando unas ecuaciones paramétricas de la circunferencia. Después haz la generalización creando una función con dos parámetros de entrada: m puntos y radio R.

```
% APARTADO a)
% Dibujo de la circunferencia de radio R
R=1;
t=0:pi/50:2*pi;    % vector de ángulos
x=R*cos(t);        % primera coordenada de los puntos de C
y=R*sin(t);        % segunda coordenada de los puntos de C
plot(x,y)          % dibujo de la circunferencia
axis equal
hold on

%dibujo de una muestra de m vectores del campo
m=8;
tv=linspace(0,2*pi,m+1) ;     % nuevo vector de ángulos
%tv=0:2*pi/m:2*pi             % también se puede definir así
xv=R*cos(tv); yv=R*sin(tv);   % nuevas coordenadas de los puntos
                              % para dibujar los vectores
U1=(xv+1).^2;U2=yv;           % componentes del campo
quiver(xv,yv,U1,U2)           % dibujo de una muestra de m vectores
```

Apartado b)

Recuerda que si el vector de posición de la curva es $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$, un vector tangente es $\mathbf{r}'(t)=x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}$ y un vector normal $\mathbf{N}(t)=y'(t)\mathbf{i}-x'(t)\mathbf{j}$.

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son:

$$x=R\cos t,\quad y=R\,\mathrm{sen}\,t,\quad 0\le t\le 2\pi$$

Por lo tanto un vector tangente es,

$$d\mathbf{r}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}=\left(-\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}\right)Rdt$$

y un vector normal saliente es,

$$d\mathbf{n}=dy\mathbf{i}-dx\mathbf{j}=\left(\cos t\,\mathbf{i}+\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}\right)Rdt$$

Donde hemos llamado, $d\mathbf{n}=\mathbf{n}ds$, siendo $\mathbf{n}=\cos t\,\mathbf{i}+\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$ y $ds=Rdt$

Planteamos a mano la integral de flujo:

$$\oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds=\int_0^{2\pi}\left(\left(R\cos t+1\right)^2 R\cos t+R^2\,\mathrm{sen}^2\,t\right)dt$$

Calculamos la integral con Matlab, utilizando cálculo simbólico

```
% APARTADO b)
% Calculamos la integral de flujo en forma simbólica
      syms u
      Flujo=int((R*cos(u)+1)^2*R*cos(u)+R^2*sin(u)^2,u,0,2*pi)
```

Apartado c)

Como sabemos que el vector normal unitario es

$$\mathbf{n} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

la componente normal del vector velocidad es

$$\mathbf{V_n} = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = \left((R\cos t+1)^2\cos t + R\operatorname{sen} t\operatorname{sen} t\right)(\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j})$$

El código en Matlab para dibujar estos vectores sería,

```
% Dibujo de una muestra de la componente normal del campo
W=(xv+1).^2.*cos(tv)+yv.*sin(tv);   % módulo de la componente normal
                                    % de V
% Componente normal de V en color rojo
quiver(X,Y,W.*cos(tv),W.*sin(tv), 'r')
```

Apartado d)

Sabemos que el vector tangente unitario es

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = (-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,Rdt$$

es decir,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T}ds, \text{ siendo } \mathbf{T} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \text{ y } ds = Rdt$$

Planteamos a mano la integral para calcular la circulación:

$$\oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}ds = \int_0^{2\pi}\left((R\cos t+1)^2(-R\operatorname{sen} t) + R^2\operatorname{sen} t\cos t\right)dt$$

Como sabemos que

$$\mathbf{T} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

la componente tangencial del vector velocidad es

$$\mathbf{V_t} = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{T} = \left(-(R\cos t+1)^2\operatorname{sen} t + R\operatorname{sen} t\cos t\right)(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})$$

Código para calcular la integral y dibujar estos vectores con Matlab:

```
% APARTADO d)
% Calculamos la integral de flujo en forma simbólica
syms u
Flujo=int((R*cos(u)+1)^2*(-R*sin(u))+R^2*sin(u)*cos(u),u,0,2*pi)
```

El código en Matlab para dibujar estos vectores sería,

```
% Dibujo de una muestra de la componente tangencial del campo
S=-(xv+1).^2.*sin(tv)+yv.*cos(tv);  % módulo de la componente normal
                                    % de V
% Componente tangencial de V en color negro
quiver(X,Y,-S.*sin(tv),S.*cos(tv), 'k')
```

Podemos escribir una función de Matlab para ejecutar todos los apartados de este ejercicio en función del radio de la circunferencia y del número de puntos donde se dibujan los vectores.

```
function flujocir(R,m)

% APARTADO a)
% Dibujo de la circunferencia de radio R
t=0:pi/50:2*pi;   % vector de ángulos
x=R*cos(t);       % primera coordenada de los puntos de C
y=R*sin(t);       % segunda coordenada de los puntos de C
plot(x,y)         % dibujo de la circunferencia
axis equal
hold on

%dibujo de una muestra de m vectores del campo
tv=linspace(0,2*pi,m+1) ;     % nuevo vector de ángulos
%tv=0:2*pi/m:2*pi             % también se puede definir así
xv=R*cos(tv); yv=R*sin(tv);   % nuevas coordenadas de los puntos
                              % para dibujar los vectores
U1=(xv+1).^2;U2=yv;           % componentes del campo
quiver(xv,yv,U1,U2)           % dibujo de una muestra de m vectores
                              %del campo sin escalar

% APARTADO b)
% Calculamos la integral de flujo en forma simbólica
syms u
Flujo=int((R*cos(u)+1)^2*R*cos(u)+R^2*sin(u)^2,u,0,2*pi)

% APARTADO c)
% Dibujo de una muestra de la componente normal del campo
W=(xv+1).^2.*cos(tv)+yv.*sin(tv);   % módulo de la componente normal
                                    % de V
% Componente normal de V en color rojo
quiver(X,Y,W.*cos(tv),W.*sin(tv), 'r')

% APARTADO d)
% Calculamos la integral de flujo en forma simbólica
syms u
Flujo=int((R*cos(u)+1)^2*(-R*sin(u))+R^2*sin(u)*cos(u),u,0,2*pi)

% Dibujo de una muestra de la componente tangencial del campo
S=-(xv+1).^2.*sin(tv)+yv.*cos(tv);  % módulo de la componente normal
                                    % de V
% Componente tangencial de V en color negro
quiver(X,Y,-S.*sin(tv),S.*cos(tv), 'k')

hold off
end
```

Comprueba estos resultados ejecutando la función en la ventana de comandos con $R=1$ y $m=8$

```
flujocir(1,8)
```

2

Circulación alrededor de una curva cerrada.

Sea C el contorno del triángulo cuyos vértices están en los puntos $A(1,1)$, $B(2,2)$ y $C(1,3)$ recorrida en sentido positivo.

a) Utiliza el teorema de Green en el cálculo de la integral

$$I=\oint_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2\,dy$$

b) Comprueba el resultado del apartado anterior haciendo la integral directamente.

c) Dibuja una muestra del campo vectorial actuando sobre el triángulo y razona si el resultado obtenido para la integral es coherente con el modo de actuar del campo.

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.-

- Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son
  - la curva C que es cerrada, simple, suave por partes[1] y orientada positivamente[2];
  - la región D del plano encerrada por la curva C;
  - un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=(M(x,y),N(x,y))$ de clase C^1 sobre D y C;
- Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que

$$\oint_C M\,dx+N\,dy=\iint_D\left(N'_x-M'_y\right)dA$$

Resolución

Este es el ejercicio propuesto nº22 del tema 2.

Apartado a)

Comprobamos que se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Green:

- C está formada por la unión de tres curvas suaves y es cerrada
- $\mathbf{F}$ es un campo de clase C^1 sobre la curva y la región encerrada por ella.

Aplicamos el teorema para calcular la integral, siendo

$$M(x,y)=2x^2+2y^2 \quad\rightarrow\quad M'_y=4y$$
$$N(x,y)=(x+y)^2 \quad\rightarrow\quad N'_x=2(x+y)$$

[1]Una curva es suave por partes si es unión finita de curvas suaves.
[2]Una curva está orientada positivamente si se recorre dejando el recinto a su izquierda.

Además, la región encerrada por la curva C es,

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 1\le x\le 2,\ \ x\le y\le 4-x\right\}$$

Por lo tanto,

$$\oint_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2\,dy=\int_1^2\int_x^{4-x}(2x-2y)dydx$$

El código para calcular esta integral es

```
syms x y
fun=2*x-2*y;;
I=int(int(fun,y,x,4-x),x,1,2)
```

Apartado b)

1. Calculamos la integral de línea a lo largo del segmento AB
   Segmento AB: $y=x$, $1\le x\le 2$, $dy=dx$
   La integral sobre este segmento es

   $$I_1=\int_1^2 8x^2dx$$

   ```
   %Segmento AB
   fun1=8*x^2;
   val1=int(fun1,x,1,2)
   ```

2. Calculamos la integral de línea a lo largo del segmento BC
   Segmento BC: $y=-x+4$, $2\ge x\ge 1$, $dy=-dx$
   La integral sobre este segmento es

   $$-I_2=\int_1^2\left(2\left(x^2+(-x+4)^2\right)-16\right)dx$$

   ```
   %Segmento BC (sentido opuesto)
   fun2=2*x^2+2*(4-x)^2-16;
   val2=int(fun2,1,2)
   ```

3. Calcula la integral de línea directamente a lo largo del segmento CA
   Segmento CA: $x=1$, $2\ge y\ge 1$, $dy=dy$, $\ dx=0$
   La integral sobre este segmento es

   $$-I_3=\int_1^3(1+y)^2\,dy$$

   ```
   %Segmento CA (sentido opuesto)
   fun3=(1+y)^2;
   val3=int(fun3,1,3)
   ```

4. Integral a lo largo de C
   ```
   val=val1-val2-val3
   ```

Apartado c)

Código en Matlab para hacer la representación

```
plot([1 2 1 1],[1 2 3 1],'r')%dibujamos el triángulo
hold on
t=linspace(1,2,10);
quiver(t,t,4*t.^2,4*t.^2);%dibujamos diez vectores en AB
s=(4-t);
quiver(t,s,2*t.^2+2*s.^2,4*ones(size(t)))%diez vectores en BC
v=linspace(1,3,10);
quiver(ones(size(v)),v,2+2*v.^2,(1+v).^2)%diez vectores en AC
hold off
```

Resumen de comandos

Todos los comandos utilizados en esta práctica son conocidos de prácticas anteriores.