Prácticas Matlab

Práctica 3 (21/02/2017)

Objetivos

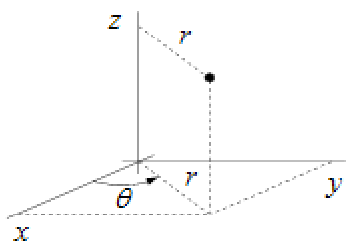
- Estudiar los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.
- Definir regiones de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cilíndricas y esféricas, para el planteamiento de integrales triples.
- Calcular integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se obtienen utilizando coordenadas polares en uno de los planos coordenados y manteniendo la tercera variable.

- Paso de cilíndricas a cartesianas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$



- Paso de cartesianas a cilíndricas:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ \ \theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x};\ \ z = z$$

$$(-\pi < \theta \le \pi,\ \ \mathrm{signo}\,\theta = \mathrm{signo}\ y)$$

Las superficies de ecuación más sencilla en coordenadas cilíndricas son:

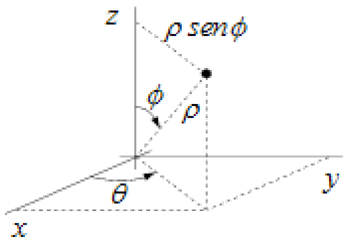
- $r = a$. Es el cilindro de eje $0Z$ y radio a ;
- $\theta = b$. Es el semiplano que contiene al eje $0Z$ y forma ángulo b con el plano XZ ($x > 0$);
- $z = c$. Es un plano perpendicular al eje $0Z$.

Llamaremos caja cilíndrica a la región del espacio acotada por las superficies anteriores.

Coordenadas esféricas

- Paso de esféricas a cartesianas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$



- Paso de cartesianas a esféricas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,;$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Las superficies de ecuación más sencilla en coordenadas esféricas son:

- $\rho = a$. Es la esfera de centro el origen y radio a;
- $\theta = b$. Es el semiplano que contiene al eje $0Z$ y forma ángulo b con el plano XZ, ($x > 0$);
- $\phi = c$. Es un semicono de eje $0Z$.

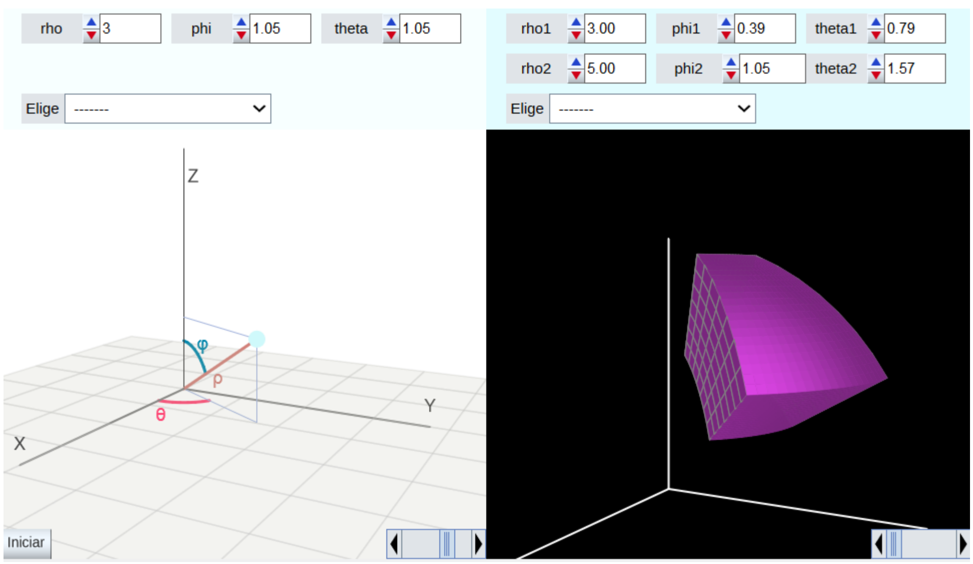
Llamaremos caja esférica a la región del espacio acotada por las superficies anteriores.

Herramienta para visualizar cajas cilíndricas y esféricas

Vete a la página

http://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integracion_multiple.html

y pincha en el enlace `Coordenadas cilíndricas y esféricas`



Se abrirá una herramienta que mostrará, en la ventana de la derecha, los valores de las coordenadas de un punto del espacio y, en el la ventana de la izquierda, sólidos determinados por variación de las coordenadas en un cierto intervalo.

Ejercicios

1

Si H es el sólido limitado inferiormente por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y superiormente por $z=3$, calcula:

a) El volumen de H

b) El valor de la integral $I=\iiint_H (x+y-2z)dV$

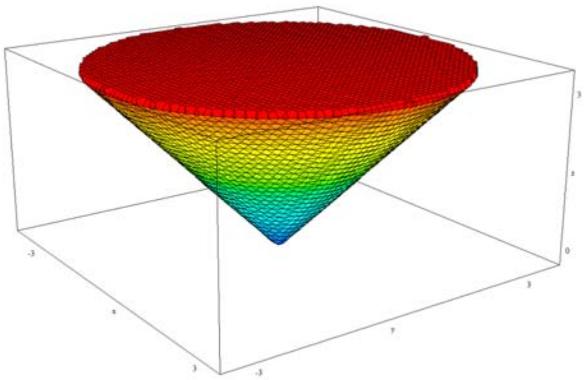
El planteamiento se hará a mano y las integrales se resolverán con Matlab.

Resolución

Este es el ejercicio propuesto 14 del tema 1.

Se recomienda utilizar coordenadas cilíndricas ya que la proyección del sólido en $z=0$ es un disco, y los límites de integración de la integral doble son constantes en este sistema de coordenadas.

La representación del sólido se muestra en la figura



a) La ecuación del cono en coordenadas cilíndricas es

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad z=r$$

b) La región cónica de la figura, expresada en coordenadas cilíndricas es:

$$H=\{(\theta,r,z)\,/\,0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le r\le 3,\ \ r\le z\le 3\}$$

Trasladamos estos límites a la integral para calcular el volumen:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^3 r\,dz\,dr\,d\theta$$

Resolvemos con Matlab:

```
syms t r z
V=int(int(int(r,z,r,3),r,0,3),t,0,2*pi)
%V=9pi
```

c) Planteamos la integral propuesta

$$I = \iiint_H (x+y-2z)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^3 \left(r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta - 2z\right) r\,dz\,dr\,dt$$

Resolvemos con Matlab:

```
syms t r z
I=int(int(int((r*cos(t)+r*sin(t)-2*z)*r,z,r,3),r,0,3),t,0,2*pi)
%I=-81pi/2
```

2

a) Halla mediante una integral triple el volumen del sólido del primer octante limitado por los planos coordenados, por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

b) Calcula la densidad media de dicho sólido, sabiendo que su densidad de masa viene dada por la función

$$\delta(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

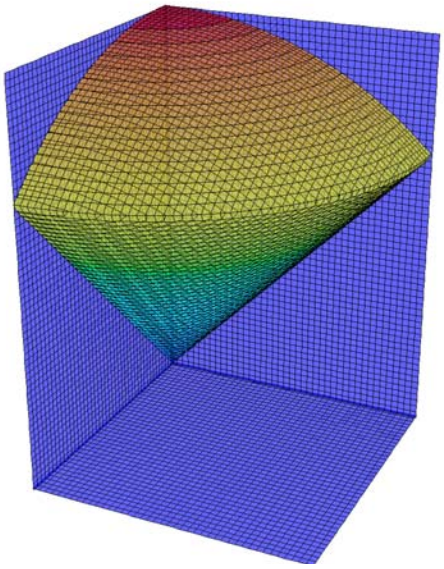
El planteamiento se hará a mano y las integrales se resolverán con Matlab.

Resolución

Este es el ejercicio propuesto 15 del tema 1.

Se recomienda utilizar coordenadas esféricas ya que el sólido es una caja esférica, y los límites de integración son constantes en este sistema de coordenadas.

La representación del sólido se muestra en la figura



Escribimos las ecuaciones del cono y de la esfera en coordenadas esféricas:

- Ecuación del cono: $z^2 = x^2 + y^2 \;\rightarrow\; \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \;\rightarrow\; \phi = \dfrac{\pi}{4}$
- Ecuación de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 8 \;\rightarrow\; \rho^2 = 8 \;\rightarrow\; \rho = 2\sqrt{2}$

El sólido de la figura utilizando coordenadas esféricas es:

$$H = \left\{ (\rho,\theta,\phi) \,/\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \;\;,\;\; 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4} \;,\;\; 0 \le \rho \le 2\sqrt{2} \right\}$$

La integral para obtener el volumen del sólido utilizando coordenadas esféricas es:

$$volumen\ H = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \rho^2 sen\phi\ d\phi\ d\rho\ d\theta$$

Resolvemos con Matlab:

```
syms rho t phi
volumen=int(int(int(rho^2*sin(phi),phi,0,pi/4),rho,0,2*sqrt(2)),t,0,pi/2))
%volumen =(8*pi*(2^(1/2) - 1))/3
```

Nota: este volumen también podría calcularse utilizando coordenadas cilíndricas:

$$volumen\ H = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2} \int_r^{\sqrt{8-r^2}} r\ dz\ dr\ d\theta$$

a) La expresión para calcular la densidad media es:

$$densidad\ \ media = \frac{\iiint\limits_H \delta(x,y,z)\ dV}{volumen\ \ H}$$

La función densidad en coordenadas esféricas es:

$$\delta(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad \delta(x,y,z) = \frac{\rho\cos\phi}{\rho\,\text{sen}\,\phi} = \frac{\cos\phi}{\text{sen}\,\phi}$$

Y la integral

$$masa\ \ de\ \ H = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4} \rho^2\cos\phi\ d\phi\ d\rho\ d\theta$$

Escribimos el código para calcular la densidad media:

```
masa=int(int(int(cos(phi)*rho^2,phi,0,pi/4),rho,0,2*sqrt(2)),t,0,pi/2)
densidadMedia=masa/volumen
%masa =(8*pi)/3
%densidadMedia =1/(2^(1/2) - 1)
```

3

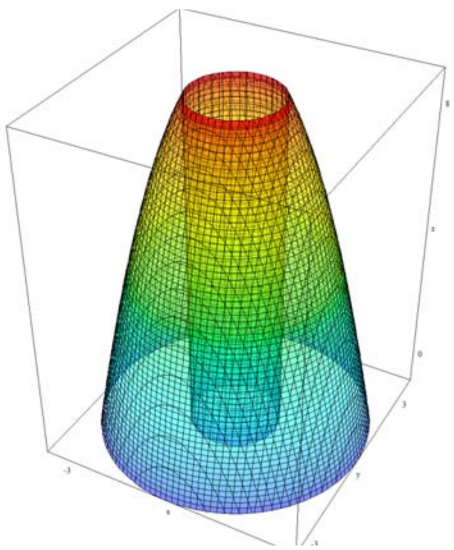
a) Calcula mediante una integral triple el volumen del sólido *H*, limitado superiormente por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, inferiormente por $z = 0$ y que es exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

b) Encuentra la temperatura media de *H*, sabiendo que la temperatura en cada punto viene dada por la distancia del punto al eje OZ.

El planteamiento se hará a mano y las integrales se resolverán con Matlab.

Resolución

Este es el ejercicio propuesto 16 del tema 1.



La representación del sólido se muestra en la figura

Se recomienda utilizar coordenadas cilíndricas ya que la proyección del sólido en $z=0$ es un disco, y los límites de integración de la integral doble son constantes en este sistema de coordenadas.

a) Escribimos las ecuaciones del paraboloide y el cilindro en coordenadas cilíndricas:

- Ecuación del paraboloide: $z=9-x^2-y^2 \rightarrow z=9-r^2$
- Ecuación del cilindro: $x^2+y^2=1 \rightarrow r=1$

La región de la figura, expresada en coordenadas cilíndricas es:

$$H=\left\{(\theta,r,z)/0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le r\le 3,\ \ 0\le z\le 9-r^2\right\}$$

La integral triple para calcular el volumen de H es:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_1^3\int_0^{9-r^2} r dzdrd\theta$$

Resolvemos con Matlab:

```
syms t r z
V=int(int(r,z,0,9-r^2),r,1,3),t,0,2*pi)
%V=32pi
```

b) La función temperatura es

$$T(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \rightarrow \qquad T(r,\theta,z)=r$$

Y la temperatura media

$$temperatura\ \ media=\frac{\iiint\limits_H T\left(x,y,z\right)\,dV}{volumen\ \ H}$$

Escribimos la integral de la temperatura en coordenadas cilíndricas

$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^3\int_0^{9-r^2} r^2 dzdrdt$$

Escribimos el código para calcular la temperatura media:

```
I=int(int(int(r^2,z,0,9-r^2),r,1,3),t,0,2*pi)
Tm=I/V
%I =(296*pi)/5
%Tm =37/20
```

Podemos calcular también los puntos del sólido que tienen una temperatura igual a la temperatura media:

$$T(r,\theta,z)=r \quad \rightarrow \quad r=\frac{37}{20}$$

Es decir los puntos buscados pertenecen al cilindro de radio $37/20$

El código en Matlab para dibujar el sólido, junto con los puntos que están a temperatura media es:

```
%dibujo del paraboloide
t=linspace(0,2*pi,20);
r=linspace(1,3,20);
[T,R]=meshgrid(t,r);
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);Z=9-R.^2;
surf(X,Y,Z); alpha 0.5;
%dibujo del cilindro interior
zv=[0,8];
[U V]=meshgrid(t,zv);
X1=cos(U);Y1=sin(U);Z1=V;
hold on
surf(X1,Y1,Z1)
%dibujo del cilindro cuyos puntos están a temperatura media
radio=37/20;
zv1=[0,9-radio^2];
[U1 V1]=meshgrid(t,zv1);
X2=radio*cos(U1);Y2=radio*sin(U1);Z2=V1;
surf(X2,Y2,Z2);
axis equal
hold off
```

4

a) Dibuja, utilizando Matlab la porción del cilindro $x^2+y^2=2x$ entre $z=-3$ y $z=3$ y sobre la misma figura una porción del cilindro parabólico $z^2=2x$.

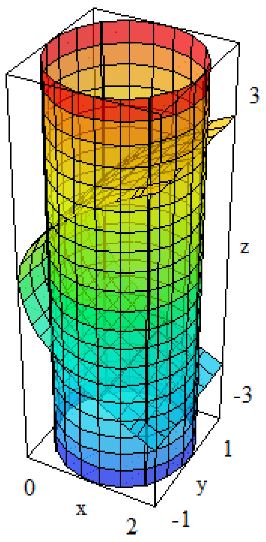
b) Calcula, utilizando el paquete simbólico de Matlab, el volumen del sólido H limitado entre las dos hojas de $z^2=2x$ (una hoja se produce con z negativo y la otra con z positivo) y el cilindro $x^2+y^2=2x$.

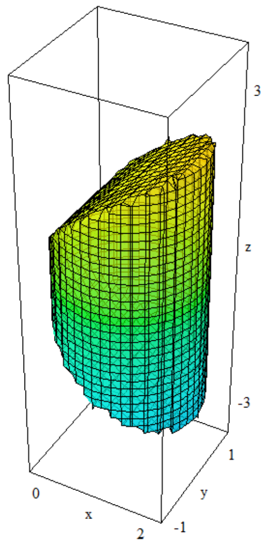
c) Calcula con Matlab, utilizando coordenadas cilíndricas, el volumen del sólido limitado por $x^2+y^2=x$ entre las dos hojas de $-x^2-y^2+z^2=1$.

Resolución

Este es el ejercicio propuesto 12 del tema 1.

a) La representación del sólido se muestra en la figura de la derecha





Código para representar la figura de la izquierda con Matlab:

```
tv=linspace(0,2*pi,30);
zv=[-3 3];
[T,V]=meshgrid(tv,zv);
X=1+cos(T);Y=sin(T);Z=V;
surf(X,Y,Z)
axis equal
alpha 0.5
hold on
y=linspace(-1,1,20);
z=linspace(-2,2,30);
[Y1,Z1]=meshgrid(y,z);
surf(Z1.^2/2,Y1,Z1)
hold off
```

b) Expresamos el sólido H utilizando coordenadas cartesianas

$$H=\left\{(x,y,z)/\ 0\le x\le 2\ \ ,\ -\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{2x-x^2},\quad -\sqrt{2x}\le z\le\sqrt{2x}\right\}$$

Teniendo en cuenta las simetrías respecto a y=o y z=o, se sabe que el volumen de H es 4 veces el volumen del primer octante

$$volumen\ H=4\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{\sqrt{2x}}dzdydx=\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{2x}\ \ dydx$$

Escribimos el código Matlab para calcular el volumen del sólido en coordenadas cartesianas

```
syms x y z
V=4*int(int(int(1,z,0,sqrt(2*x)),y,0,sqrt(2*x-x^2)),x,0,2)
% V=128/15
```

La ecuación del disco $x^2+y^2=2x$ en polares es $r=2\cos\theta$, por lo tanto el sólido en coordenadas cilíndricas es:

$$H=\left\{(\theta,r,z)\,/\,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2\cos\theta,\ -\sqrt{2r\cos\theta}\le z\le\sqrt{2r\cos\theta}\right\}$$

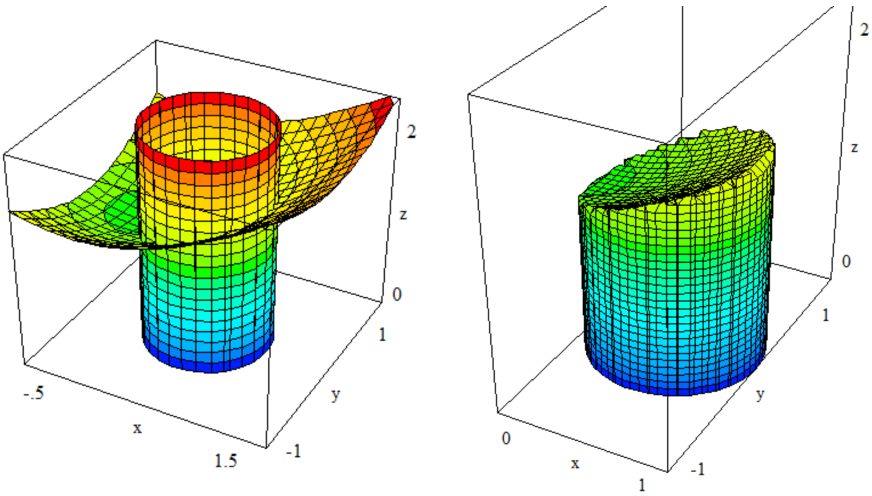
Planteamos el volumen en este sistema de coordenadas, aplicando simetrías,

$$volumen\ H=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\sqrt{2r\cos\theta}} r\,dz\ dr\ d\theta=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2r\cos\theta}\ dr\ d\theta$$

El código para resolver la integral es:

```
syms r t z
V=4*int(int(int(r,z,0,sqrt(2*r*cos(t))),r,0,2*cos(t)),t,0,pi/2)
% V=128/15
```

c) La representación del sólido para $z\ge 0$, se muestra en la figura de la derecha



La ecuación del disco $x^2+y^2=x$ en polares es $r=\cos\theta$, por lo tanto el sólido en coordenadas cilíndricas es:

$$H=\left\{(\theta,r,z)\,/\,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\cos\theta,\ -\sqrt{1+r^2}\le z\le\sqrt{1+r^2}\right\}$$

Y el volumen, en este sistema de coordenadas, aplicando simetrías,

$$volumen\ H=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{\sqrt{1+r^2}} r\,dz\ dr\ d\theta=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{1+r^2}\ dr\ d\theta$$

El código para resolver la integral es:

```
syms r t z
V=double(4*int(int(int(r,z,0,sqrt(1+r^2)),r,0, cos(t)),t,0,pi/2))
% V= 1.8338
```