Prácticas Matlab

Práctica 1 (7/02/2017)

Objetivos

- Calcular integrales dobles sobre rectángulos mediante sumas de Riemann.
- Representar superficies, como ayuda para calcular integrales dobles.
- Calcular integrales dobles de forma simbólica.

Definiciones

Definición (Suma de Riemann).- Llamaremos suma de Riemann de la función $f(x,y)$ definida en el rectángulo R para la partición $\{R_k\}_{k=1}^{n}$ a la suma,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

donde (x_k, y_k) es un punto cualquiera tomado en el subrectángulo R_k y ΔA_k es el área de R_k .

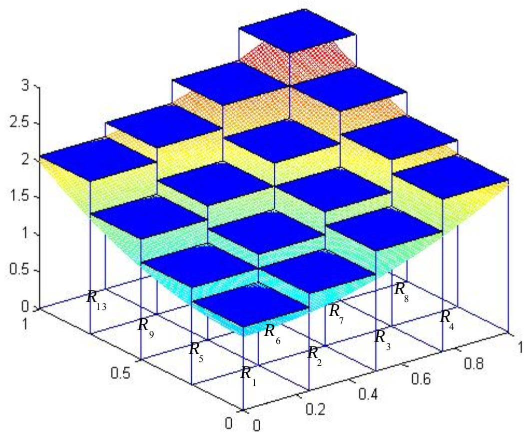


Figura 1.- Representación de la suma de Riemann

Definición (Integral doble).- Sea f una función de dos variables definida sobre un rectángulo cerrado R. Si para toda partición de R, tal que la norma de la partición tiende a cero, existe el límite

$$\lim_{\substack{\|R\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

se dice que f es integrable en R. Además el valor de éste límite es la integral doble de f sobre R y se denota por

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\|R\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Comandos de Matlab

1.- Para sumar los elementos de una matriz o de un vector

`sum(A)`

Si A es un vector suma sus componentes. Si A es una matriz, devuelve un vector fila con la suma de las filas o columnas de A especificadas.

Ejemplo:

```
>> A=ones(3,3)
>> sum(A(1:2,:)
```

2.- Para representar superficies junto con planos verticales en su perímetro

`meshz(X,Y,Z)`

Representa la superficie definida por las ternas de puntos `(X,Y,Z)`.

Ejemplo:

```
>> [X,Y] = meshgrid(-3:.1:3);
>> Z=sin(X.*Y)
>> meshz(X,Y,Z)
```

2.- Para calcular el valor de una integral doble en un rectángulo

`int(int(f,y,c,d),x,a,b)`

Este commando calcula la integral de la función f sobre el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$

Ejemplo:

```
>> syms x y
>> I=int(int(x*y,y,1,2),x,0,1)
>> double(I)
```

3.- Para crear una función de usuario

```
function [out1, out2, ...] = funname(in1, in2, ...)
```

Crea una función de nombre `funname`, con unos parámetros de entrada `(in1,in2,…)` y unas variables de salida `(out1, out2,…)`. Se debe guardar la función en un fichero llamado `funname.m`.

Ejemplo:

```
function [media,desviacion] = estadistica(x)
n = length(x);
media = sum(x)/n;
desviacion = sqrt(sum((x-media).^2/n));
end
```

para ejecutar esta función para un cierto vector `x`, se debe escribir en la ventana de comandos lo siguiente:

```
>> x=[1,2,3,4,5];
>> [media,desviacion] = estadistica(x)
```

Ejercicios

1

Sumas dobles de Riemann.

Se considera la función $z = e^{-(x^2+y^2)}$, definida en el rectángulo $R = [0,1]\times[0,1]$.

a) Representa la superficie con Matlab, usando el comando `meshz`.

b) Plantea a mano y calcula con Matlab, las sumas de Riemann para particiones de 10 y de 20 intervalos en cada eje, tomando el valor de la función en los siguientes puntos de cada celda :

- en el punto más alejado del origen,
- en el punto más próximo al origen,
- en el punto medio.

c) Escribe una función externa para calcular las sumas de Riemann de punto medio, en función del número de celdas de la partición (n).

d) Calcula con Matlab el valor exacto de la integral.

Resolución

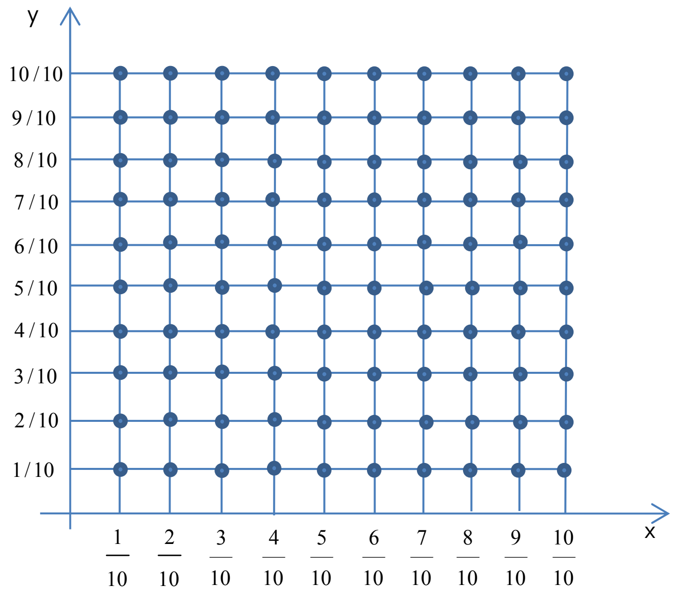
a) El código para representar la superficie con Matlab, utilizando el comando `meshz`, es.

```
[X,Y]=meshgrid(0:0.05:1);
Z=exp(-X.^2-Y.^2);
meshz(X,Y,Z)
```

b) La suma de Riemann que aproxima la integral tomando una partición en $n \times n$ celdas es:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z(x_i,y_j)\Delta x\Delta y \underset{\Delta x=\Delta y=\frac{1}{n}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{-(x_i^2+y_j^2)}$$

Plantearemos, a modo de ejemplo, la suma de Riemann tomando el valor de la función en el punto más alejado del origen de cada celda. En la figura y la tabla siguientes se describe esta situación:



X

Y	1/10	2/10	3/10	4/10	5/10	6/10	7/10	8/10	9/10	10/10
1/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{1}{10}\right)$
2/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{2}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{2}{10}\right)$
3/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{3}{10}\right)$
4/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{4}{10}\right)$
5/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{5}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{5}{10}\right)$
6/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{6}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{6}{10}\right)$
7/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{7}{10}\right)$
8/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{8}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{8}{10}\right)$
9/10	$\left(\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{9}{10}\right)$
1	$\left(\frac{1}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{5}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{6}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{10}{10}\right)$	$\left(\frac{10}{10},\frac{10}{10}\right)$

Las coordenadas de la tabla, para la celda que ocupa la i-ésima columna y la j-ésima fila son:

$$x_i = i\Delta x = \frac{i}{10}, \qquad i = 1,2,\ldots,10$$

$$y_j = j\Delta y = \frac{j}{10}, \qquad j = 1,2,\ldots,10$$

Con estos valores la suma de Riemann es: $S = \dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} e^{-\left(\frac{i}{10}\right)^2-\left(\frac{j}{10}\right)^2}$

Nótese que se trata de la suma inferior de Riemann ya que, en este caso, la función toma su valor mínimo en este punto. Desarrollamos los sumatorios utilizando la notación $z(x_i, y_j)$, por comodidad.

$$S = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} z(x_i, y_j) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}\left[z(x_i,\frac{1}{10}) + z(x_i,\frac{2}{10}) + z(x_i,\frac{3}{10}) + \ldots + z(x_i,1)\right] =$$

$$= \frac{1}{100}\left[\begin{array}{l} z(\frac{1}{10},\frac{1}{10}) + z(\frac{1}{10},\frac{2}{10}) + z(\frac{1}{10},\frac{3}{10}) + \ldots + z(\frac{1}{10},1) + \\ + z(\frac{2}{10},\frac{1}{10}) + z(\frac{2}{10},\frac{2}{10}) + z(\frac{2}{10},\frac{3}{10}) + \ldots + z(\frac{2}{10},1) + \\ + z(\frac{3}{10},\frac{1}{10}) + z(\frac{3}{10},\frac{2}{10}) + z(\frac{3}{10},\frac{3}{10}) + \ldots + z(\frac{3}{10},1) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + z(1,\frac{1}{10}) + z(1,\frac{2}{10}) + z(1,\frac{3}{10}) + \ldots\ldots\ldots + z(1,1) \end{array}\right] = 0{,}5107$$

Para obtener este resultado se puede recurrir al siguiente código de Matlab:

Suma inferior de Riemann, 10x10

```
inc=1/10
x=inc:inc:1;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=exp(-X.^2-Y.^2);
vol_aprox=sum(Z(:))*inc*inc
```

Apoyándote en este código, escribe otro equivalente para calcular las sumas de Riemann de punto medio y de punto más próximo al origen, para una partición de 10x10 celdas y de 20x20. Con los resultados obtenidos, completa la tabla que figura al final del apartado.

Suma de Riemann con punto medio, 10x10:

```
inc=1/10;
x=inc/2:inc:1-inc/2;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=exp(-X.^2-Y.^2);
volaprox=sum(Z(:))*inc*inc
```

Suma superior de Riemann, 10x10:

```
inc=1/10;
x=0:inc:1-inc;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=exp(-X.^2-Y.^2);
volaprox=sum(Z(:))*inc*inc
```

$P_{n\times n}$	Ssuperior	Sinferior	Spmedio
$P_{10\times 10}$	0,6050	0,5107	0,5582
$P_{20\times 20}$	0,5814	0,5342	0,5579

c) En este apartado escribimos una función para calcular las sumas de Riemann de punto medio en función del número de intervalos que se tomen sobre el segmento $[0,1]$.

```
function sumariemann2(n)
inc=1/n;
x=inc/2:inc:1-inc/2;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=exp(-X.^2-Y.^2);
volumen_aproximado=sum(Z(:))*inc*inc
end
```

d) El valor que se obtiene con Matlab, redondeado a cuatro cifras decimales es:

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 0,5577$$

Código Matlab:

```
syms x y
I=double(int(int(exp(-x^2-y^2),y,0,1),x,0,1))
```

2

Sumas dobles de Riemann.

Se considera el sólido limitado superiormente por la superficie $z=\sqrt{1+\cos^2(xy)}$, situada sobre el rectángulo $R=[1,3]\times[1,2]$.

a) Representa la superficie con Matlab, utilizando el comando meshz.

b) Aproxima el volumen del sólido, planteando a mano y calculando con

Matlab, la suma de Riemann para una partición regular de 10×8 celdas, tomando el valor de la función en el punto medio de cada celda.

c) Comprueba la calidad de la aproximación, calculando el valor exacto de la integral.

Resolución

a) Código para representar la superficie:

```
x=linspace(1,3,30);
y=linspace(1,2,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=sqrt(1+cos(X.*Y).^2);
meshz(X,Y,Z)
```

b) Incrementos: $\Delta x=\frac{1}{5},\quad \Delta y=\frac{1}{8}$

Puntos medios: $x_i=\left(\frac{2i-1}{2}\right)\Delta x=\frac{2i-1}{10},\qquad y_j=\left(\frac{2j-1}{2}\right)\Delta y=\frac{2j-1}{16}$

Suma de Riemann: $S=\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{8}\sqrt{1+\cos^2\frac{(2i-1)(2j-1)}{160}}$

Para calcular esta suma de Riemann crearemos una función de usuario con el siguiente código:

```
function suma2(a,b,c,d,n,m)
%Rectángulo de lados [a,b]x[c,d]
%nxm es el número de celdas de la partición
incx=(b-a)/n;
incy=(d-c)/m;
x=a+incx/2:incx:b-incx/2;
y=c+incy/2:incy:d-incy/2;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=sqrt(1+cos(X.*Y).^2);
S=sum(Z(:))*incx*incy
end
```

Para escribir la función usaremos el editor y guardaremos el fichero con el nombre de la función, en este caso el nombre del fichero debe de ser necesariamente `suma2`.

Estos ficheros NO se pueden ejecutar desde el editor pulsando el símbolo 

sino que deben ejecutarse escribiendo en la ventana de comandos el siguiente comando:

```
>> suma(1,3,1,2,10,8)
```

El resultado obtenido es: $S=2.4242$

Si es necesario corregir un error en el fichero, se debe **guardar** la corrección antes de volver a ejecutar la función.

c) El valor exacto de la integral es: $I = 2.4240$

Este resultado se ha obtenido con el siguiente código:

```
syms x y
I=double(int(int(sqrt(1+cos(x*y)^2),y,1,2),x,1,3))
```

Se puede crear una función más general con Matlab incluyendo también, como parámetro de entrada, la función que se integra.

```
function suma=sumadoble(a,b,c,d,n,m,f)
%Rectángulo de lados [a,b]x[c,d]
%nxm es el número de celdas de la partición
%f debe introducirse entre comilla
incx=(b-a)/n;
incy=(d-c)/m;
x=a+incx/2:incx:b-incx/2;
y=c+incy/2:incy:d-incy/2;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
F=vectorize(inline(f));
%F=@(x,y) eval(vectorize(f));
sz=F(X,Y);
suma=sum(sz(:))*incx*incy;
end
```

Para ejecutar este fichero, con los mismos valores anteriores, escribiremos en la ventana de comandos lo siguiente:

```
suma=sumadoble(1,3,1,2,10,8,'sqrt(1+cos(x*y)^2)')
```

Resumen de comandos

Se recogen aquí los comandos utilizados en esta práctica que se darán por conocidos en las prácticas siguientes y que conviene retener porque se podrán preguntar en las distintas pruebas de evaluación. También se supondrán conocidos los comandos que fueron utilizados en las prácticas de Cálculo I.

- Para sumar elementos de un vector o una matriz: `sum`
- Para dibujar superficies con planos laterales: `meshz`
- Para crear funciones: `function`
- Para calcular integrales dobles: `int`