Prácticas Matlab

Práctica 11 (16/05/2017)

Objetivos

- Calcular Transformadas de Laplace y Transformadas Inversas de Laplace, utilizando cálculo simbólico.
- Aplicar Transformadas de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.
- Comprobar propiedades de la transformada de Laplace.

Comandos de Matlab

1.- Para obtener la transformada de Laplace de una función, utilizando cálculo simbólico

```
F=laplace(f)
```

Ejemplo:

```
>> syms t positive
>> f=t^2;
>> F=laplace(f)
```

2.- Para obtener de forma simbólica la transformada inversa de Laplace de una función

```
F=ilaplace(f)
```

Ejemplo:

```
>> syms s
>> Y=1/(s+1);
>> y=ilaplace(Y)
```

3.- Para representar funciones simbólicas

```
ezplot(f,[a,b])
```

Representa la función simbólica f(x) en el interval [a,b])

Ejemplo:

```
>> syms t
>> ezplot(t^2+4,[-1,1])
```

4.- Para definir la función escalón

```
heaviside(t)
```

Define la función escalón o Heaviside

Ejemplo:

```
>> syms t
>> ezplot(heaviside(t-2),[-2,2])
```

Propiedades de la Transformada de Laplace

Propiedad (Trasformada de la derivada).- Si la función $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas y de tipo exponencial para $t \geq 0$, entonces

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0), \quad s > \alpha$$

Si f no es continua, pero existe $f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ se verifica

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^+), \quad s > \alpha$$

Ejercicios

1

Resolución de problemas de valor inicial

Se consideran los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} x'' + 2x' + x = 4\cos 2t \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x'' + 12x' + 5x = U(t) - U(t-1) \\ x(0) = 1/2, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'' + 4x' + 4x = t^2 + e^{-2t} \\ x(0) = 1/2, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$

Se pide:

1. Encontrar su solución utilizando transformadas de Laplace.
2. Representar en una misma gráfica, con el comando `ezplot`, la función de entrada y la función de salida.

Solución a)

Se resuelve, a modo de ejemplo, el primer problema planteado en el ejercicio.

a) Aplicamos la trasformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación,

$$\mathfrak{L}\left(x'' + 2x' + x\right) = \mathfrak{L}\left(4\cos 2t\right) \quad \rightarrow \quad \mathfrak{L}\left(x''\right) + 2\mathfrak{L}(x') + \mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}\left(4\cos 2t\right)$$

Aplicamos la propiedad de la transformada de la derivada, para calcular las transformadas del miembro de la izquierda:

$$\mathfrak{L}\left(x''\right) = s\mathfrak{L}(x') - x'(0) = s\left(s\mathfrak{L}(x) - x(0)\right) - x'(0) = s^2\mathfrak{L}(x) - sx(0) - x'(0) = s^2\mathfrak{L}(x) - 2$$

$$\mathfrak{L}\left(x'\right) = s\mathfrak{L}(x) - x(0) = s\mathfrak{L}(x)$$

$$\mathfrak{L}\left(4\cos 2t\right) = \frac{4s}{s^2+4}$$

Llamamos $X(s) = \mathfrak{L}(x)$ y sustituimos en la expresión inicial:

$$\mathfrak{L}\left(x'' + 2x' + x\right) = \mathfrak{L}\left(4\cos 2t\right) \quad \rightarrow \quad \mathfrak{L}\left(x''\right) + 2\mathfrak{L}(x') + \mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}\left(4\cos 2t\right)$$

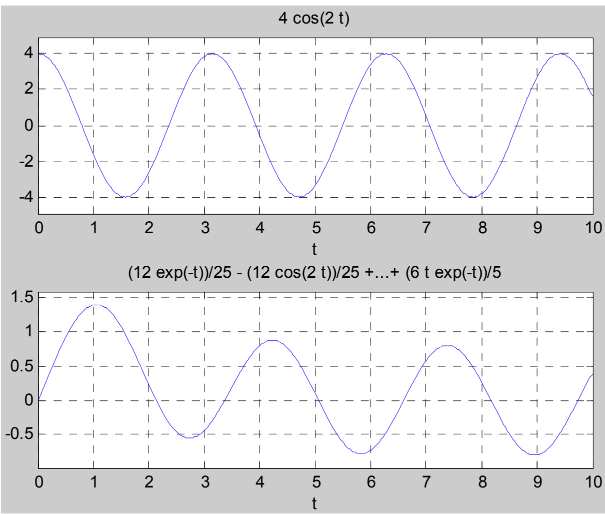
$$s^2X(s) - 2 + 2sX(s) + X(s) = \frac{4s}{s^2+4} \quad \rightarrow (s^2+2s+1)X(s) = 2 + \frac{4s}{s^2+4}$$

Despejamos $X(s)$ y a partir de ella se calcula su transformada inversa

$$X(s) = \left(2 + \frac{4s}{s^2+4}\right)\frac{1}{s^2+2s+1} \quad \rightarrow \quad x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2s^2+4s+8}{(s^2+4)(s^2+2s+1)}\right)$$

Código en Matlab para resolver el ejercicio:

```
%Ejercicio 1_a
syms t positive
f=4*cos(2*t);
F=laplace(f);
%la respuesta es F=4s/(s^2+4)
syms s
x=ilaplace((2+F)/(s^2+2*s+1));
%se obtiene x=(12*exp(-t))/25-
(12*cos(2*t))/25+(16*sin(2*t))/25+(6*t*exp(-t))/5
%Representación de f y x
subplot(2,1,1)
ezplot(f,[0,10])
grid on
subplot(2,1,2)
ezplot(x,[0,10])
grid on
```



Los restantes casos se resolverán de forma análoga, encontrando a mano la expresión de $X(s)$.

Apartado b)

$$x(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left(\left(\frac{1-e^{s}}{s}+\frac{9s}{2}+6\right)\frac{1}{9s^{2}+12s+5}\right)$$

Apartado c)

$$x(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left(\left(\frac{2}{s^{3}}+\frac{1}{s+2}+\frac{s}{2}+2\right)\frac{1}{s^{2}+4s+4}\right)$$

2

Una masa que pesa 32 kg. se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 m. cuando se le aplica una fuerza de 4 kg. Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando t=0 y si, en ese instante, se aplica una fuerza de excitación $f\left(t\right)=\cos t$ que cesa abruptamente en $t=2\pi$ segundos, determinar la función de posición de la masa en cualquier instante, si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos.

Teniendo en cuenta la ley de Hooke, la ecuación que modela la posición de la masa m es

$$x''+4x=f\left(t\right) \qquad f\left(t\right)=\begin{cases}\cos t & 0\le t\le 2\pi\\ 0 & t>2\pi\end{cases}$$

Solución

$$x\left(t\right)=\frac{1}{4}t\,\mathrm{sen}\left(2t\right)-U\left(t-2\pi\right)\mathrm{sen}\left(2t\right)\frac{\left(t-2\pi\right)}{4}$$

Resumen de comandos

Se recogen aquí los comandos utilizados en esta práctica que se darán por conocidos en las prácticas siguientes y que conviene retener porque se podrán preguntar en las distintas pruebas de evaluación. También se supondrán conocidos los comandos que fueron utilizados en prácticas anteriores y en las prácticas de Cálculo I.

- Para calcular transformadas de Laplace `laplace`
- Para calcular transformadas inversas de Laplace `ilaplace`
- Para representar funciones simbólicas `ezplot`
- Función escalón `heaviside`