ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo diferencial de funciones de una variable.
- Cálculo integral de funciones de una variable.
- Derivación de la función compuesta e implícita.
- Representación de curvas planas.
- Dibujo de curvas con Matlab.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Poder definir los conceptos básicos del tema.
2. Dada una función de una variable, saber comprobar que es solución de una ecuación diferencial ordinaria dada.
3. Saber comprobar si una familia uniparamétrica de curvas es solución general de una e.d.o. de primer orden dada. Saber obtener una solución particular cumpliendo una condición inicial. Conocida su solución general, poder encontrar la ecuación correspondiente.
4. Saber si un problema de valor inicial tiene solución y ésta es única.
5. Saber obtener las trayectorias oblicuas a una familia dada.
6. Poder reconocer las ecuaciones de los tipos separables, homogéneas, exactas y lineales, manejando las técnicas de búsqueda de solución analítica de esas ecuaciones.
7. Realizar cambios de variable en e.d.o. de primer orden.
8. Saber bosquejar un campo de direcciones de una e.d.o. de primer orden y utilizarlo, junto con las isoclinas para aproximar gráficamente una solución.
9. Poder analizar las características relativas a monotonía y concavidad de las curvas de una familia uniparamétrica, conociendo únicamente la ecuación diferencial que verifican.
10. Entender los métodos de Euler y Euler mejorado para la aproximación de soluciones de problemas de valor inicial y saber utilizarlos con la ayuda de calculadora u ordenador.
11. Saber utilizar los polinomios de Taylor para aproximar soluciones de problemas de valor inicial.
12. Poder escribir la e.d.o. de primer orden que modela un proceso y resolverla analítica o numéricamente.

ECUACIONES DIFERENCIALES. DEFINICIONES BÁSICAS

1 Definiciones

Llamaremos ecuación diferencial (ED) a una ecuación diferencial ordinaria (EDO) o a una ecuación en derivadas parciales (EDP), de acuerdo con las definiciones siguientes:

Ecuación diferencial ordinaria (EDO). Es toda *ecuación* que liga la variable independiente (por ejemplo, x) con alguna derivada de la función incógnita $\left(y\left(x\right), y'\left(x\right), \ldots, y^{(n}\left(x\right)\right)$:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n}(x)\right) = 0$$

Ecuación en derivadas parciales (EDP).- Es aquella en la que la función incógnita depende de más de una variable independiente conteniendo la ecuación derivadas respecto de diferentes variables.

Orden de la ecuación diferencial.- Es el mayor orden de la derivada que aparece en la ecuación diferencial

Ejemplo: Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias

- $y' + 2x = 0$, es de orden 1
- $y' + 2x = 4y''$, es de orden 2
- $xy''' + 2xy'' = x^3 + 1$, es de orden 3

Ejemplo: Las siguientes son ecuaciones diferenciales parciales

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3\dfrac{\partial u}{\partial y} + u$, es de orden 1
- $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, es de orden 2
- $u''_{x} + u''_{yy} = u$, es de orden 2

En esta asignatura, trabajaremos únicamente con EDOs.

2 Soluciones

Resolver una ecuación diferencial es encontrar la función que la verifica.

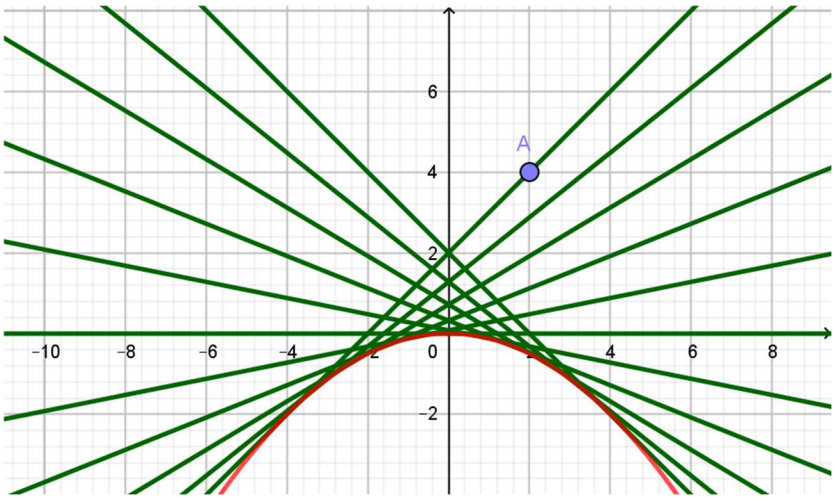
Solución de la EDO.- Es una función $y=\phi(x)$, definida en un intervalo $I=(a,b)$ que tiene al menos n derivadas continuas en I y que satisface la *EDO* en I.

$$F\left(x,\phi(x),\phi'(x),\ldots,\phi^{(n}(x)\right)=0$$

Distinguimos tres tipos de soluciones

- **Solución general de la EDO**.- Es una familia de funciones dependientes de n parámetros, de la cual pueda extraerse la EDO por derivación y eliminación de los parámetros.
- **Solución particular de la EDO**.- Es cada una de las funciones que se obtiene de la solución general al dar valores a los parámetros.
- **Solución singular de la EDO**.- Es una solución que no puede extraerse de la solución general.

Ejemplo: Consideremos la familia de rectas $y=Cx+2C^2$ que es la solución general de la ecuación diferencial $y=xy'+2\left(y'\right)^2$. Se puede comprobar que la parábola $x^2+8y=0$ es una solución singular. Se puede observar que la parábola es tangente en cada uno de sus puntos a una curva de la familia de rectas, cuando ocurre esto, se dice que la curva es la **envolvente de la familia** de curvas. En este caso, $x^2+8y=0$ es la envolvente a la familia de rectas $y=Cx+2C^2$



Cualquier curva de la familia sería una solución particular. Así, por ejemplo, si queremos la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto (2,4), bastará considerar el valor de C=1 obteniéndose la solución particular $y=x+2$.

3 Problema de valor inicial

Condiciones iniciales para la EDO.- Es un conjunto de n datos que acompañan a la ecuación, formado por los valores que toma la función incógnita y sus derivadas en un punto $x = x_o$: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Problema de valor inicial de orden n (p.v.i.).- Es una e.d.o de orden n acompañada de n condiciones iniciales:

$$\begin{cases} F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n}(x)\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \ldots, \; y^{(n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

4 Linealidad

EDO lineal.- Es toda ecuación lineal en las variables $y, \; y', \ldots, \; y^{(n}$, tomando la forma:

$$a_n(x)y^{(n}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

En una EDO lineal la variable dependiente y sus derivadas sólo aparecen elevadas a grado uno, y además, cada coeficiente sólo depende de la variable independiente.

5 Modelización

Modelar mediante ecuaciones diferenciales un fenómeno o proceso es escribir en términos de ecuaciones diferenciales las relaciones de cambio sufridas por unas magnitudes frente a otras en el desarrollo de ese fenómeno. Una vez establecido un modelo matemático, podrá encontrarse una solución exacta o aproximada de las variables incógnitas que intervienen en el proceso.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

6 Conceptos básicos

Se escriben a continuación las distintas formas en las que puede presentarse la ecuación de una EDO de primer orden.

- La **forma implícita** de una EDO de primer orden es $F\left(x, y, y'\right) = 0$.

- Si en la ecuación implícita se puede despejar y', se obtiene la **forma explícita** $y' = f(x,y)$.

- Teniendo en cuenta que $y' = \dfrac{dy}{dx}$, también se puede escribir la ecuación en **forma diferencial** $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

La **solución general** de la EDO de primer orden es una familia uniparamétrica (dependiente de un parámetro) de funciones

$$y = \phi(x, C)$$

donde C es un parámetro real; para cada valor de C se obtendrá una **solución particular**.

Ejemplo: Consideremos la ecuación diferencial $(x^2+1)y' + 3y = 2$. Esta expresión de la ecuación diferencial sería la forma implícita. Puede pasarse a la forma explícita despejando y'

$y' = \dfrac{2-3y}{x^2+1}$, siendo $f(x,y) = \dfrac{2-3y}{x^2+1}$.

Teniendo en cuenta que $y' = \dfrac{dy}{dx}$ se tendrá, la forma diferencial de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-3y}{x^2+1} \Rightarrow (x^2+1)dy = (2-3y)dx \Rightarrow (2-3y)dx - (x^2+1)dy = 0$$

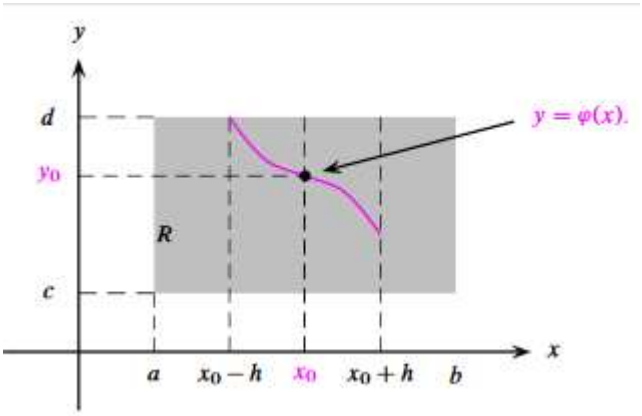
7 Teorema de existencia y unicidad

Un **problema de valor inicial** de primer orden es

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

y se resuelve (también se dice integra) encontrando la función de la familia $y = \phi(x,C)$ que verifica $y(x_0) = y_0$. Geométricamente, la familia solución general es el conjunto de curvas en las que se cumple que la pendiente en un punto es el valor de la función f en ese punto. De esas curvas, la que pasa por el punto (x_0, y_0) es la solución del problema de valor inicial.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.-
Dada la ecuación $y' = f(x,y)$, con f definida en $D = [a,b]\times[c,d]$, $a < x_0 < b$, $c < y_0 < d$, si f y f'_y son continuas en D, entonces existe una solución única de la ecuación cumpliendo que $y(x_0) = y_0$; esta solución única del problema de valor inicial está definida en un intervalo centrado en x_0.



Ejemplo. ¿Tiene solución el PVI $y' = x^2 y - y^5$ con $y(2) = -3$?

Para esta ecuación se tiene que $f(x,y) = x^2 y - y^5$, que es una función continua en $\mathbb{R}^2$ y con derivada parcial respecto de y, $f_y'(x,y) = x^2 - 5y^4$, también continua en todo el plano. Por lo tanto, aplicando el teorema de existencia unidad se puede garantizar que hay una solución y solo única que pasa por el punto (2,-3).

Ejemplo. ¿Tiene solución el PVI $y' = \log(xy)$ con $y(0) = 2$?

En este caso la función $f(x,y) = \log(xy)$ está definida en el primer cuadrante, siendo continua en dicho cuadrante salvo los ejes coordenados. La función $f_y'(x,y) = \dfrac{1}{y}$, es continua en todo el plano salvo el eje y=0. Por lo tanto, como el punto (0,2) se encuentra sobre el eje x=0, el teorema no asegura la existencia de solución única.

Si se tuviera una condición del tipo $y(x_o) = y_o$ con $(x_o, y_o) \in D = \{(x,y) \,/\, x > 0,\ y > 0\}$ entonces sí se podría asegurar la existencia de una única solución pasando por dicho punto.

8 Campo de direcciones

La ecuación

$$y' = f(x,y)$$

fija, en cada punto del plano donde f está definida, el valor de la pendiente de la curva $y = y(x)$ solución de la ecuación diferencial.

La terna (x, y, y') establece la dirección de la recta que pasa por (x,y) y es tangente a la curva solución $y = y(x)$. Así, la ecuación genera un campo de direcciones; la representación gráfica de este campo mediante pequeños segmentos situados en una muestra de puntos del plano es lo que se suele llamar **campo de direcciones** de la ecuación diferencial.

El campo de direcciones de la ecuación proporciona un "mapa" aproximado de las soluciones, pues al representar sus tangentes plasma gráficamente cómo van cambiando estas soluciones. Además, facilita el trazado de una solución particular, al menos de forma aproximada; esta aproximación es

en ocasiones suficiente, como por ejemplo si únicamente fuera de interés el comportamiento de la solución en cuanto a monotonía y concavidad.

9 Isoclinas

Para facilitar el trazado del campo de direcciones suelen utilizarse las curvas en las que la pendiente permanece constante, al ser paralelos sobre sus puntos todos los segmentos que pintemos. Una **isoclina** es el lugar geométrico de los puntos del plano donde la pendiente de las curvas solución es constante, siendo su ecuación $f(x,y)=C$. Las pendientes de las soluciones en los puntos de corte con la isoclina son, por tanto, $y'=C$.

Dando a C un número suficiente de valores próximos podremos dibujar una red de isoclinas que permita representar el campo de direcciones. Uniendo un número finito de los segmentos del campo obtenemos una aproximación gráfica, en forma de poligonal, de la solución particular que se precise. Ver figuras 1 y 2.

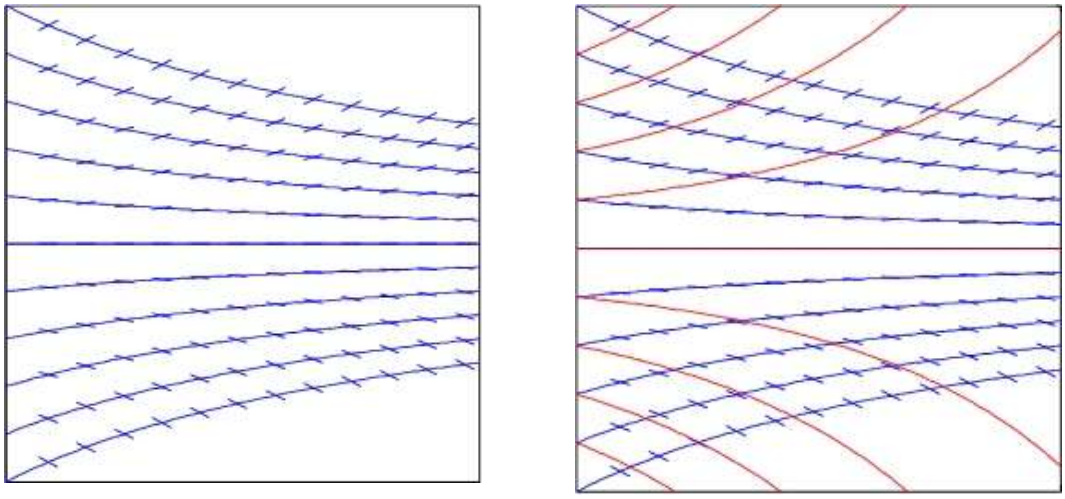


Figura 1.- A la izquierda, muestra de isoclinas (hipérbolas) y del campo de direcciones de la ecuación $y'=xy$; a la derecha se superponen algunas soluciones.

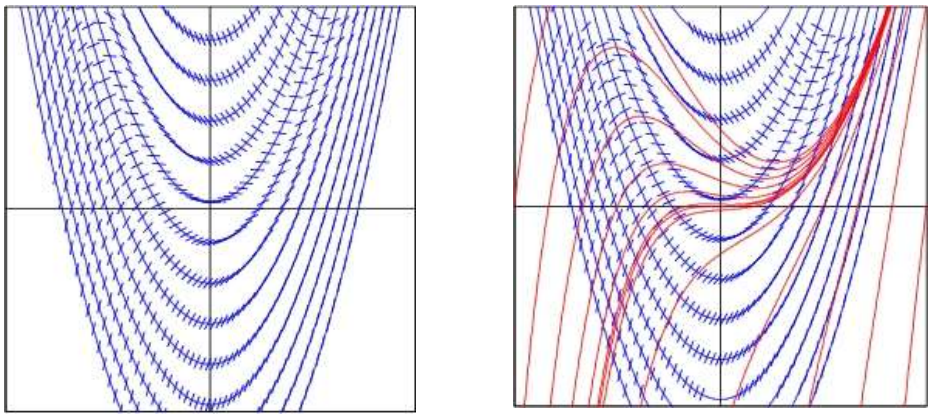


Figura 2.- A la izquierda, muestra de isoclinas (parábolas) y del campo de direcciones de la ecuación $y'=x^2-y$; a la derecha se superponen algunas soluciones.

10 Métodos elementales de resolución

Veamos a continuación algunos tipos de ecuaciones de primer orden con sus métodos de resolución.

TIPO 1. ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES O SEPARADAS

Definición (**Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden**).- Una EDO de primer orden es de variables separables si se puede escribir de la forma $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$ o también si se puede escribir de la forma $y' = g(x)h(y)$

En el caso de que la ecuación sea de la forma $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$, las funciones que satisfacen esta ecuación deben cumplir alguna de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy\ ,\quad f_2(x) = 0\ ,\quad g_1(y) = 0$$

RESOLUCIÓN

La solución general se obtendrá por integración de la primera de las ecuaciones anteriores:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$$

y deberá analizarse si $f_2(x) = 0$ y $g_1(y) = 0$ proporcionan soluciones singulares.

CAMBIO DE VARIABLE

En las EDO de primer orden es frecuente utilizar un cambio de variable para reducir la dificultad de la ecuación. Por ejemplo, el cambio $u = ax + by + c$, reduce la ecuación $y' = g(ax + by + c)$ a una de variables separables.

Ejemplo: Encontrar la familia de curvas cuya pendiente de la recta tangente en todos sus puntos está dada por $y' = \dfrac{2y}{x}$.

Es una ecuación diferencial de variables separadas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\log|y|}{2} = \log|x| + k \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \log|y| = \log x^2 + k \qquad \Rightarrow \qquad e^{\log|y|} = e^{\log x^2 + k} \quad \Rightarrow \qquad |y| = Cx^2 \qquad C > 0$$

$$\Rightarrow \qquad y = Cx^2 \qquad C \in \mathbb{R}$$

TIPO 2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Definición.- Una **función** $f(x,y)$ es **homogénea** de grado n en sus argumentos si se cumple $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

Ejemplo: Por ejemplo $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 5y^3$ es homogénea de grado 3 ya que

$$f(tx,yt) = (tx)^3 + (tx)(ty)^2 + 5(ty)^3 = t^3(x^3 + xy^2 + y^3) = t^3 f(x,y)$$

Observa que en este caso todos los monomios tienen el mismo grado, que es 3.

Definición (**Ecuación diferencial homogénea**).- Una ecuación expresada de la forma $y' = f(x,y)$ es homogénea si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero en sus argumentos.
Si aparece expresada de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ será homogénea si tanto M como N son homogeneas del mismo orden.

Ejemplo:

(a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ es homogénea. Observamos que $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ es homogénea de grado 0. El numerador es homogéneo de grado 1 y el denominador también. Por lo tanto, la ecuación diferencial es homogénea.

(b) $(x^2 + xy)dx + y^2 dy = 0$ es homogénea ya que $M(x,y) = x^2 + xy$, $N(x,y) = y^2$ son funciones homogéneas de grado 2 (ambas son suma de monomios de grado 2).

(c) $y' = sen\left(\dfrac{x^3}{x^2y + y^3}\right)$ también es homogénea. $f(x,y) = sen\left(\dfrac{x^3}{x^2y + y^3}\right)$ es homogénea de grado 0.

RESOLUCIÓN

Las ecuaciones diferenciales homogéneas se resuelven reduciéndolas a ecuaciones de variables separables mediante el cambio de variable: $z = \dfrac{y}{x}$, o lo que es lo mismo $y = zx$, con lo cual

$dy = dz \cdot x + z \cdot dx$ o $y' = z' \cdot x + z$.

Ejemplo: Encontrar la familia de curvas cuya pendiente de la recta tangente en todos sus puntos está dada por $y' = \dfrac{2y}{x}$.

Esta ecuación diferencial, que se resolvió como de variables separadas, puede resolverse también como homogénea. Realizamos el cambio

$$z = \frac{y}{x} \qquad\qquad y' = x\ z' + z$$

Se tendrá que

$$x\,z' + z = 2z \quad \Rightarrow \quad x\,z' = z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \log|z| = \log|x| + k$$

Tomando logaritmos

$$|z| = |x|C \qquad C > 0$$

Deshaciendo el cambio,

$$|y| = Cx^2 \qquad C > 0 \ \Rightarrow \qquad y = Cx^2 \qquad C \in \mathbb{R}$$

TIPO 3. ECUACIONES EXACTAS

Definición (**EDO exacta**).- La EDO, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación exacta si existe una función $u(x,y)$ tal que $du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$

Si esto es así, se tendrá que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ \Rightarrow \ du(x,y) = 0$$

con lo cual la solución general de la ecuación será la familia uniparamétrica $u(x,y) = C$

Para conocer si una ecuación es exacta se utilizará el siguiente test de exactitud.

TEOREMA (CRITERIO DE ECUACIÓN EXACTA).-
Supongamos $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones con derivadas parciales continuas. La ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si y sólo si $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

RESOLUCIÓN

Si la EDO es exacta, existe una función $u(x,y)$ tal que

$$u'_x(x,y) = M(x,y)\,, \qquad u'_y(x,y) = N(x,y)$$

puesto que la solución general de la ecuación es $u(x,y)=C$, debemos hallar $u(x,y)$ realizando los siguientes pasos:

1. Integrar $M(x,y)$ respecto de x

$$u'_x(x,y)=M(x,y) \;\Rightarrow\; u(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)$$

2. Derivar respecto de y la expresión obtenida para $u\left(x,y\right)$ e igualar a $N\left(x,y\right)$ para despejar $C'\left(x,y\right)$

$$u'_y(x,y)=N(x,y) \;\Rightarrow\; C'(y)=\ldots$$

3. Integrar $C'\left(x,y\right)$ respecto de y.

Como es obvio, este proceso se puede comenzar igualmente integrando N respecto de y para luego derivar el resultado respecto de x.

FACTOR INTEGRANTE

En ocasiones es posible convertir ecuaciones que no son exactas en exactas mediante el método del factor integrante.

Definición (**Factor integrante**).- La función $\mu(x,y)$ es factor integrante de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ si es exacta la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

La solución general de esta última es la solución general de la ecuación inicial. Con este nuevo término surge la pregunta, ¿en qué condiciones puede encontrarse un factor integrante? Analizamos seguidamente la respuesta.

Sabemos que si $\mu(x,y)$ es factor integrante de la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

es exacta. Por tanto, debe ocurrir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y}=\frac{\partial \mu N}{\partial x} \Rightarrow M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

y entonces

$$M\frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu}-N\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow M\frac{\partial}{\partial y}(\log\mu)-N\frac{\partial}{\partial x}(\log\mu)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales, de la cual sólo vamos a encontrar alguna solución particular y sólo en algún caso concreto, como son los dos siguientes:

CASO 1.- $\mu=\mu(x)$:

El factor integrante depende sólo de x, luego la ecuación anterior queda reducida a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log \mu) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

por lo que, dada una ecuación diferencial, para detectar si estamos en este caso basta ver que el término de la derecha de la expresión anterior es sólo función de x. En caso afirmativo, integramos esta expresión para obtener el factor integrante,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

CASO 2.- $\mu = \mu(y)$:

Análogamente si el factor integrante depende sólo de y, luego la ecuación se reduce a la siguiente

$$\frac{\partial}{\partial y}(\log \mu) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

encontrando por integración la forma del factor $\mu(y)$ siempre que el segundo término de la expresión anterior dependa sólo de y. El factor integrante resulta ser

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}$$

Por supuesto estos dos casos no cubren todas las posibles ecuaciones para las que se puede encontrar un factor integrante. El mismo método que se ha seguido para saber cuándo existe un factor integrante en función sólo de x o sólo de y, podría aplicarse para factores integrantes en función de xy, $x+y$, etc.

Ejemplo: Resolver $(4x+3y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$ sabiendo que admite un factor integrante dependiente solo de x, es decir, de la forma $\mu = \mu(x)$.

Comprobamos si es diferencial exacta:

$$\left.\begin{array}{lll} M(x,y) = 4x + 3y^3 & \Rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 9y^2 \\ N(x,y) = 3xy^2 & \Rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 \end{array}\right\}$$

No es exacta, por lo que sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ se tendrá que cumplir que la siguiente ecuación es exacta

$$\underbrace{\mu(x)(4x+3y^3)}_{M_1(x,y)} dx + \underbrace{\mu(x)3xy^2}_{N_1(x,y)} dy = 0$$

es decir,

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$\mu(x)9y^2 = \mu'(x)3xy^2 + \mu(x)3y^2$$

$$\mu'(x)3xy^2 = \mu(x)6y^2 \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{2}{x}$$

Integrando

$$\log \mu(x) = \int \frac{2}{x} dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$$

Esta expresión se podría haber obtenido directamente a partir de la expresión deducida en general:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\log x^2} = x^2$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante se tendría que la siguiente ecuación diferencial es exacta

$$(4x^2 + 3x^2y^3)dx + 3x^3y^2dy = 0$$

Y se puede comprobar que su solución es:

$$x^4 + x^3y^3 = C$$

TIPO 4. ECUACIONES LINEALES

Definición.- Una EDO lineal de primer orden es de la forma $y' + p(x)y = q(x)$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en la región en la que se integra.

- Si $q(x) = 0$ la ecuación se llama lineal homogénea.
- Si $q(x) \neq 0$ la ecuación se llama completa.

Ejemplo: Son ejemplos de ecuaciones lineales

- $xy' - y = x^2 \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = x$, observa que $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x$.
- $xy' - y = 0 \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = 0$ Ecuación lineal homogénea.

MÉTODO 1 DE RESOLUCIÓN

La solución general de la ecuación lineal completa se puede obtener siguiendo un método específico basado en el siguiente teorema, que se enuncia sin demostración.

TEOREMA.-
Si se denota por y_p cualquier solución particular de la ecuación completa $y' + p(x)y = q(x)$ y por y_h la solución general de la homogénea asociada $y' + p(x)y = 0$, entonces la solución general de la ecuación completa es $y_p + y_h$.

La consecuencia del teorema anterior es que para resolver una ecuación lineal basta encontrar la solución general de su homogénea asociada y una solución particular de la completa.

RESOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA ASOCIADA

No tiene ninguna novedad, pues todas las EDOs lineales homogéneas son de variables separables:

$$y' = -p(x)y \;\Rightarrow\; y = Ce^{g(x)} \quad \text{ó} \quad y = 0$$

donde

$$g(x) = -\int p(x)dx$$

La única dificultad puede venir del cálculo de primitivas necesario para la resolución.

SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA COMPLETA

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa se puede utilizar el **Método de variación de constante**s, que consiste en buscar una solución particular convirtiendo en función indeterminada la constante de la familia uniparamétrica de soluciones de la homogénea asociada:

$$y_h = Ce^{g(x)} \Rightarrow \; y_p = C(x)e^{g(x)}$$

Para determinar $C(x)$ se deriva y se impone que se verifique la ecuación diferencial

$$y_p' = e^{g(x)}(C'(x) - C(x)p(x)) \qquad \Rightarrow \qquad y_p' + p(x)y_p = C'(x)e^{g(x)} = q(x)$$

de aquí se despeja $C'(x)$ y se obtiene $C(x)$ por integración.

$$C'(x) = q(x)e^{-g(x)} \qquad \Rightarrow \qquad C(x) = \int q(x)e^{-g(x)}dx$$

Por tanto, la solución general es:

$$y_g = y_p + y_h = e^{g(x)}\int q(x)e^{-g(x)}dx + Ce^{g(x)}$$

Sacando factor común $e^{g(x)}$ y agrupando la constante de integración con la que se obtendrá al calcular $C(x)$, resulta finalmente,

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y' + 2xy = 4x$

Solución

La solución general de la ecuación completa es $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$.

Primero se resuelve **la ecuación homogénea** asociada, que es de variables separadas

$$y' + 2xy = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2x dx \quad \rightarrow \quad \log|y| = -x^2 + \log C \quad \rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}$$

Buscamos ahora una **solución particular de la ecuación completa**:

$$y_p(x) = C(x)e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad y'_p(x) = e^{-x^2}\left(C'(x) - 2xC(x)\right)$$

Sustituyendo en la ecuación inicial

$$y_p' + 2xy_p = 4x \quad \rightarrow \quad e^{-x^2}\left(C'(x) - 2xC(x)\right) + 2xC(x)e^{-x^2} = 4x$$

$$e^{-x^2}C'(x) = 4x \quad \rightarrow \quad C(x) = \int 4x\, e^{x^2} dx = 2e^{x^2}$$

$$y(x) = Ce^{-x^2} + 2\, e^{x^2} e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + 2$$

MÉTODO 2: RESOLUCIÓN COMO EXACTA

Escribiendo la ecuación en forma diferencial $\left(p(x)y - q(x)\right)dx + dy = 0$, se observa que siempre va a tener un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$. Es decir,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{\int p(x)dx}$$

Multiplicando la ecuación por este factor integrante y resolviendo como exacta se llega a la expresión

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int q(x)\mu(x)dx$$

También se llega a esta solución teniendo en cuenta que si la EDO es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Multiplicando por el factor $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ se cumple que

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx} y' + e^{\int p(x)dx} p(x) y}_{=\left(e^{\int p(x)dx} y\right)'} = e^{\int p(x)dx} q(x) \quad \Rightarrow \quad \left(\mu(x)y\right)' = \mu(x)q(x)$$

Integrando

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)q(x)dx \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y'+2xy=4x$

Solución

Sabiendo que admite un factor integrante de forma

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$$

se tendrá

$$e^{x^2}y'+2xe^{x^2}y=4xe^{x^2}$$

Opción 1: Dado que

$$\left.\begin{array}{l} e^{x^2}y'+2xe^{x^2}y=4xe^{x^2} \\ e^{x^2}y'+2xe^{x^2}y=\left(e^{x^2}y\right)' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e^{x^2}y=\int 4xe^{x^2}dx$$

$$\Rightarrow e^{x^2}y=2e^{x^2}+C \Rightarrow y=2+Ce^{-x^2}$$

Opción 2: La resolvemos directamente como exacta

$$\left(2xe^{x^2}y-4xe^{x^2}\right)dx+e^{x^2}dy=0$$

Buscamos u(x,y) de forma que

$$\begin{array}{ll} u_x'=2xe^{x^2}y-4xe^{x^2} & (1) \\ u_y'=e^{x^2} \rightarrow \boxed{u(x,y)=e^{x^2}y+h(x)} & (2) \end{array}$$

Derivando respecto de x la expresión de u obtenida en (2) y aplicando (1)

$$2xe^{x^2}y+h'(x)=2xe^{x^2}y-4xe^{x^2} \quad \Rightarrow h'(x)=-4xe^{x^2}$$

$$\Rightarrow h(x)=-2e^{x^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=e^{x^2}y-2e^{x^2}=C}$$

O lo que es lo mismo $\boxed{y=2+Ce^{-x^2}}$

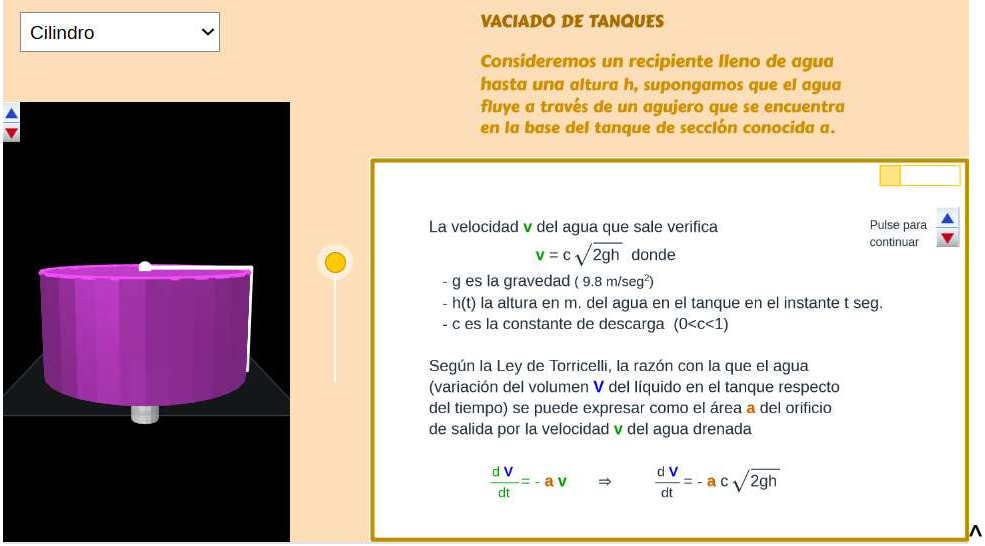
MODELADO DE PROCESOS FÍSICOS Y PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

11 Ejemplos de aplicación

VACIADO DE TANQUES

Utiliza la herramienta Vaciado de tanques de la página

https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integral_superficie.htmll



^2

para ver un ejemplo de aplicación de una ecuación diferencial.

LA RAZÓN DE CAMBIO DE UNA VARIABLE ES PROPORCIONAL AL VALOR DE LA VARIABLE EN CADA INSTANTE

Podemos citar varios procesos que responden a este modelo: el ritmo de cambio de una población, la velocidad a la que una sustancia A se transforma en otra en una reacción química simple, los procesos de desintegración radiactiva o el ritmo de cambio de la velocidad de un móvil debido a fuerzas de rozamiento.

La ecuación diferencial que rige estos procesos es

$$\frac{dy}{dt} = \pm ky$$

La constante k introduce en la ecuación una medida de la rapidez con la que se produce el cambio en la magnitud estudiada. El valor de k es propio de cada proceso y si no se conoce, se podrá determinar conociendo dos datos del valor de y, en $t = 0$ y en otro instante t.

- La cantidad inicial, $y(0)$, acompañará a la ecuación para definir un problema de valor inicial y se utilizará para encontrar la forma de su solución particular.
- El dato en otro valor del tiempo se impondrá a la solución anterior para determinar el valor de k y con ello la función $y(t)$.

DESINTEGRACIÓN

Dadas las características de los materiales radiactivos, con el paso del tiempo ocurre una desintegración o decaimiento del material. No quiere decir que el material desaparezca si no que la configuración de sus átomos cambia y dejan de ser radiactivos.

El tiempo que transcurre para que la cantidad del material inicial decaiga a la mitad se llama *vida media del material radiactivo*.

CAMBIO DE TEMPERATURA DE UN OBJETO

Experimentalmente se ha comprobado que la temperatura de un cuerpo cambia proporcionalmente a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra. Esta es una formulación básica de la **ley de enfriamiento de Newton**.

Si para el momento en que se empieza a estudiar el proceso, $t=0$, la temperatura del cuerpo es $T(0)=T_0$, y la temperatura del medio es T_m , esto se modeliza a través de la ecuación

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$$

La ecuación irá acompañada de la condición inicial $T(0)=T_0$ y se deberá contar con otro dato de la temperatura para determinar el valor de la constante k al igual que ocurría en la aplicación anterior.

- Cuando $T_0>T_m$, ocurrirá un enfriamiento y T(t) decrece por lo tanto

$$\frac{dT}{dt}<0\ ,\quad T-T_m>0$$ por lo tanto, k será negativa.

- Cuando $T_0<T_m$, ocurrirá un calentamiento y T(t) crece por lo tanto

$$\frac{dT}{dt}>0\ ,\quad T-T_m<0$$ por lo tanto, k será negativa.

TRAYECTORIAS ISÓGONAS

Se llaman trayectorias isógonas a las familias de curvas que se cortan bajo un ángulo dado.

Si todos los cortes entre curvas de dos familias se producen bajo un ángulo de φ radianes, quiere decir que las rectas tangentes en los puntos de corte forman ése ángulo φ.

Por lo tanto, si

- $y_1'=tg\alpha$, es la pendiente de las curvas de la primera familia, e
- $y_2'=tg\beta$, es la pendiente de las trayectorias isógonas

se cumple, $\beta=\alpha+\varphi$, y la relación entre las pendientes de ambas familias es:

$$y_1'=tg\alpha=tg\left(\beta-\varphi\right)=\frac{tg\beta-tg\varphi}{1+tg\beta tg\varphi}=\frac{y_2'-tg\varphi}{1+y_2'\,tg\varphi}$$

Suponiendo que se conozca la ecuación diferencial de una de éstas familias, la ecuación diferencial de la otra familia se obtendrá sin más que sustituir la derivada conocida por su expresión en función de la derivada de la familia buscada.

Por ejemplo, si conocemos la edo $y' = f(x,y)$, la edo de sus trayectorias isógonas con ángulo φ es:

$$\frac{y' - tg\varphi}{1 + y' tg\varphi} = f(x,y)$$

TRAYECTORIAS ORGONONALES

En el caso de que las trayectorias sean ortogonales, la relación entre las pendientes es:

$$y_1' = -\frac{1}{y_2'}$$

Lo cual, aplicado a la EDO $y' = f(x,y)$, conduce a la EDO de las trayectorias ortogonales,

$$-\frac{1}{y'} = f(x,y)$$

LÍNEAS DE FLUJO O LÍNEAS DE FUERZA

Recordemos que las líneas de flujo de un campo vectorial, son las trayectorias seguidas por una partícula cuyo campo de velocidad es el campo vectorial dado. De esta forma los vectores del campo son tangentes a las líneas de flujo en cada punto.

Llamando,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

la condición para que la curva cuyo vector desplazamiento es $d\mathbf{r}$ sea una línea de flujo del campo $\mathbf{F}$ se traduce en el siguiente sistema,

$$\boxed{\frac{dx}{M} = \frac{dy}{N} = \frac{dz}{P}}$$

que establece la proporcionalidad entre las componentes de los vectores $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$. La resolución de este sistema conduce a la familia de curvas buscada.

FLUJO DE CALOR EN UNA DIMENSIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO

El flujo de calor en una dimensión se gobierna por la ecuación

$$\boxed{H = kA\frac{dT}{dr}}$$

donde H es la cantidad de calor fluyendo a través de un material (cal/sg), k es el coeficiente de conductividad térmica ($cal/(^oC \cdot cm \cdot sg)$), A es el área perpendicular al flujo del calor (cm^2), T es la temperatura (^oC) y r es la distancia (cm).

Ejemplo. Por una tubería de sección transversal circular por la que está circulando vapor, el flujo de calor es perpendicular al flujo de vapor. Supondremos tanto simetría axial como radial. Si tomamos una porción de tubería de 1 *cm* de longitud, el área de la superficie para un radio r es $2\pi r \cdot 1 = 2\pi r$. La variable r varía desde el radio interno (r_0) hasta el radio externo. Llamaremos T_0 a la temperatura del vapor en r_0, es decir, en la pared interna del tubo. Si la tasa de flujo, H, y el coeficiente k de conductividad térmica son conocidos, la ecuación anterior modela la distribución de temperatura hacia el exterior de la pared de esa parte del tubo:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{H}{2\pi rk}$$

Junto con la condición $T = T_0$ en $r = r_0$.

Ejercicios propuestos

1 Halla la e.d.o. de primer orden cuya solución general es la familia $y = \sqrt{x^2 - Cx}$

Solución: $2xydy = (x^2 + y^2)dx$

2 Las expresiones

1) $y_1(x) = C - 3\cos 2x$
2) $y_2(x) = \log(C^2 + e^x)$

corresponden a dos familias uniparamétricas de curvas porque cada valor real del parámetro C proporciona una curva diferente.

a. Comprueba que todas las curvas de la familia 1) verifican la relación $y' = 6\,sen(2x)$
b. Encuentra la ecuación diferencial de la familia 2).
c. Encuentra la curva de cada familia que pasa por el punto $P(1,2)$.
d. Lo que has realizado en el apartado anterior ¿se podría hacer para cualquier punto $P(x_o, y_o)$ del plano con ambas familias?

Solución: b) $y' = e^{x-y}$

c) $y_1(x) = 2 + 3(\cos 2 - \cos 2x)$; $y_2(x) = \log(e^2 - e + e^x)$

3 Una familia de curvas también puede venir dada por una expresión implícita. Por ejemplo $(x-1)^2 + (y+2)^2 = C^2$ es la familia de circunferencias centradas en $(1,-2)$ y radio $|C|$.

a. Utilizando derivación implícita, prueba que todas las curvas de la familia anterior verifican la relación $y'(x) = \dfrac{1-x}{y+2}$
b. b. Encuentra la curva de esa familia que pasa por el punto $P(3,0)$.
c. Analiza si es posible encontrar una curva de esa familia pasando por cualquier punto $P(x_0, y_0)$ del plano.

Solución: b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$

4 Para la familia $x^3y^3 - x^2 = C$

a. Encuentra la relación entre x, y e y' que verifica cada curva de la familia; esto es

más sencillo si se utiliza derivación implícita.

b. Determina la curva de esa familia que pasa por el punto $P(1,4)$.

c. Analiza si es posible encontrar una curva de esa familia pasando por cualquier punto $P(x_0, y_0)$ del plano.

Solución: a) $y' = \dfrac{2-3xy^3}{3x^2y^2}$

b) $x^3y^3 - x^2 = 63$

5 Comprueba que las familias de curvas definidas por las funciones siguientes son ortogonales[1]: $x^2 - y^2 = ky$, $x^3 + 3xy^2 = C$

6 Dada la ecuación diferencial $y' = 2x$

a. Busca todas las funciones $y = y(x)$ que la verifican. Debes obtener una familia uniparamétrica de curvas (esto es lo que se llama solución general de la ecuación).

b. Si no fuera tan sencillo encontrar la familia de soluciones, una herramienta que facilita el estudio de su comportamiento es el método de las isoclinas (una isoclina es el lugar geométrico de los puntos del plano donde la pendiente de las soluciones es la misma) y el dibujo del campo de direcciones (que es una muestra de pequeños segmentos de las rectas tangentes a las curvas solución). Representa las isoclinas de pendientes $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$ y sobre ellas el campo de direcciones.

c. Representa las soluciones que pasan por los puntos $(0,-0.5)$, $(0,0)$ y $(0,0.5)$.

Solución: a) $y = x^2 + C$

7 Sin encontrar su expresión, analiza crecimiento y concavidad de las curvas solución de cada una de la siguientes ecuaciones:

a. $y' = x + 1$

b. $y' = (y-1)^2$

Solución: a) decreciente: $x \in (-\infty, -1)$, creciente: $x \in (-1, \infty)$; cóncava.

b) crecientes y cóncavas si $y > 1$, crecientes y convexas si $y < 1$

8 Para cada una de las siguientes ecuaciones,

1) $y' = xy$ 2) $y' = x + y$ 3) $y' = x^2 - y$

contesta a estas preguntas:

a. Traza a mano una muestra de las isoclinas correspondientes a cada ecuación. Sobre cada isoclina traza los segmentos que indican la pendiente de esa isoclina.

b. Estudia la monotonía y la concavidad de las curvas solución y comprueba que concuerda con el campo de direcciones representado en el apartado anterior.

Solución: 1) Crecientes en $xy > 0$, (1º y 3er cuadrantes); decrecientes en $xy < 0$ (2º y 4ºcuadrantes); cóncavas en $y > 0$; convexas en $y < 0$.

2) Crecientes en $y + x > 0$; decrecientes en $y + x < 0$; cóncavas en $y + x + 1 > 0$; convexas en $y + x + 1 < 0$.

3) Crecientes en $y < x^2$; decrecientes en $y > x^2$; cóncavas en $y > x^2 - 2x$; convexas en $y < x^2 - 2x$.

9 Encuentra la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial, comprobando si se verifican o no las condiciones de existencia y unicidad de solución:

a. $(1+e^x)yy' = e^y$, $y(0) = 0$

b. $y \log y\, dx + x\, dy = 0$, $y(1) = 1$

c. $x\sqrt{1-y^2}\, dx + y\sqrt{1-x^2}\, dy = 0$, $y(0) = 1$

Solución: a) $e^{-y}(1+y) = 1 - x + \log \dfrac{1+e^x}{2}$

b) $y(x) = 1$ c) $y(x) = 1$,

$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$

10 Halla la solución general de las ecuaciones siguientes transformándolas en una de variables separables mediante los cambios de variable que se indican.

[1] Todas los cortes entre curvas de ambas familias se producen perpendicularmente, luego las pendientes en los puntos de corte distan $\pi/2$ radianes; puesto que $tg(\alpha + \pi/2) = -1/tg\,\alpha$ esto significa que la derivada de una familia es inversa y opuesta a la de la otra.

a. $2x+2y-1=-y'(x+y-2)$;
cambio: $z=x+y$

b. $y'=\cos(x-y+5)$;
cambio: $z=x-y+5$

Solución:

a) $x+y+1=C\exp\dfrac{2x+y}{3}, \quad (C\geq 0)$;

b) $x+C=-\operatorname{cotg}\left(\dfrac{x-y+5}{2}\right)$

11 Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

a. $x(2x^2+y^2)dx+y(x^2+2y^2)dy=0$

b. $(3x^2-y^2)dx-2xydy=0$

c. $\left(2x+\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy$

Solución: a) $x^4+x^2y^2+y^4=C$

b) $x^3-xy^2=C$ c) $x^2-y^2+x^3y=Cxy$

12 Dada la ecuación diferencial $\left(x\sin(ax/2)-ay\right)dx=k\,x\,dy$, se pide:

a. Determinar a mano el valor de k para que la ecuación diferencial sea exacta.
b. Resolver con Matlab la ecuación diferencial para el valor de K calculado.
c. Encontrar con Matlab la curva solución que pasa por el punto $\left(-\dfrac{a}{2},1\right)$

Solución: a) k=a b)

$$y=\frac{C}{x}+\frac{4sen\left(ax/2\right)}{a^3x}-\frac{2\cos\left(ax/2\right)}{a^2}$$

13 Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones:

a. $3x^2+4xy+\left(2x^2+y\right)y'=0$

b. $ydx+\left(x+\dfrac{2}{y}\right)dy=0$

c. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$

Solución: a) $x^3+2x^2y+\dfrac{y^2}{2}+C=0$

b) $xy+2\log y=C$ c) $2x+e^{xy}-y^2=C$

14 Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones, utilizando un factor integrante. En el primer caso, la ecuación admite factor integrante de la forma $\mu=\mu(x)$ y en el segundo de la forma $\mu=\mu(y)$:

a. $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$

b. $xdx+ydy+x(xdy-ydx)=0$

Solución: a) $xy^2-2x^2y-2=Cx$

b) $x^2+2y-1=C(1-y)^2$

15 Para cada uno de los casos siguientes, encuentra la solución general y la particular si la ecuación se acompaña de una condición inicial:

a. $y'-2xy=x^3e^{-x^2}$, $y\left(0\right)=1$

b. $4x-3y+y'(2y-3x)=0$

c. $xy'+(2x-3)y=4x^4$

d. $ydx+(xy+x-3y)dy=0$

e. $uv'=v(1-u\operatorname{tg}u)+u^2\cos u$

f. $r\theta'=3\theta+r^4e^r+r^5e^{-r}$

g. $\theta(-2)=8\operatorname{Ch}2 \quad Nota:\operatorname{Ch}2=\dfrac{e^2+e^{-2}}{2}$

Solución

a) $y_g(x)=-\dfrac{1}{4}\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}+Ce^{x^2}$,

$y_p(x)=-\dfrac{1}{4}\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}+\dfrac{9}{8}e^{x^2}$,

b) $y^2-3xy+2x^2=C$

c) $y_g(x)=x^3(2+Ce^{-2x})$

d) $x_g(y)=C\dfrac{e^{-y}}{y}+3\dfrac{y-1}{y}$,

e) $v_g(u)=u(u+C)\cos u$

f) $\theta_p(r)=r^3(C+e^r-e^{-r}-re^{-r})$

16 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'=\dfrac{y}{x-y}$;

b) $y'=\dfrac{2y-x}{2x-y}$;

c) $\left(x\,\text{sen}\,\dfrac{y}{x} - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\,\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

Solución: a) $y(x) = C\cdot e^{-x/y}$;

b) $y - x = C\cdot\left(y+x\right)^3$; c) $x\cdot\text{sen}\,\dfrac{y}{x} = C$

17 [2]Se vierte agua con 0.5 kg de sal por litro (l) a un tanque a razón de 2 l/min, y la mezcla homogénea sale al mismo ritmo. Tras 10 min, se para el proceso y se vierte agua limpia a razón de 2 l/min, con la nueva mezcla saliendo a la misma razón. Si inicialmente había 100 litros de agua pura en el depósito, se pide:
Escribe las ecuaciones que rigen este proceso para la cantidad (en kg) de sal en el tanque en función del tiempo (observa que habrá dos ecuaciones, según que el tiempo sea menor o mayor que 10 min.)
Encuentra la cantidad de sal en el tanque a los 20 min., resolviendo analíticamente las ecuaciones anteriores.
Solución: b) $S(20) = 7.42053\ kg$;

18 Un tanque con agua está recibiendo tierra arrastrada por una riada a razón de 700 $dm^3\ /\ sg$. El agua arrastra 53 $gr\ /\ dm^3$ de tierra y el tanque contiene inicialmente 113,2 m^3 de agua limpia. Un desagüe en el tanque permite salir la mezcla a razón de 140 $dm^3\ /\ sg$.

a. Encontrar la ecuación que verifica $S(t)$, que es la cantidad de tierra en el tanque, transcurrido el tiempo t. (Recordar que la tasa de cambio de $S(t)$ será la diferencia entre la tasa de entrada y la tasa de salida).
b. Resolver analíticamente la ecuación obtenida en el apartado anterior.

Solución: b) $S(1800) = 5.6042\cdot 10^7\ gr$

19 Un bote de masa m, disminuye su movimiento bajo la acción de la fuerza de resistencia del agua, la cual es proporcional a la velocidad del bote. La velocidad inicial del bote es 1,5 m/sg, y al cabo de 4 s su velocidad es 1 m/sg.

a. ¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad disminuirá hasta 1 cm/sg?
b. ¿Qué distancia recorrerá el bote hasta detenerse?

Solución: a) $t \approx 49,4\,sg$ b) $s \approx 14,8\,m$

20 Se dispone inicialmente de 2 gr de un elemento radiactivo en proceso de desintegración. Al cabo de 3 sg quedan 1,4 gr. ¿Cuánto tardará en descomponerse 0,5 gr más?
Solución: $t \approx 6,7\,sg$

21 Dos recipientes de igual capacidad se llenan de líquidos diferentes. El recipiente A se mantiene a 10ºC y el B a 80ºC. Una pequeña pieza metálica con temperatura inicial de 30ºC se introduce en el recipiente A, donde su temperatura baja a 25ºC durante el primer minuto; a los 2 minutos (desde el comienzo) se saca de A y se introduce en B, donde pasado otro minuto alcanza los 40ºC. ¿Cuánto tiempo, contado desde el principio del proceso, tardará la pieza en llegar a 60ºC?
Nota: Experimentalmente se ha comprobado que la temperatura de un cuerpo cambia proporcionalmente a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra: $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_m), (k > 0)$

Donde, T_m es la temperatura del medio
Solución: La temperatura durante los 2 primeros minutos es $T(t) = 10 + 20\left(\dfrac{3}{4}\right)^t$ y para los siguientes minutos $T(t) = 80 - \dfrac{235}{4}\left(\dfrac{32}{47}\right)^{t-2}$. La temperatura será de 60ºC para $t \approx 4,8\,\text{min}$.

22 Un depósito contiene inicialmente 110 gr de sal disueltos en 10 litros de disolución. Durante los 7 primeros minutos se vierte disolución a razón de 25 cl/min con 12 gr/l de sal. Tras esos 7 min se abre un orificio de salida (el flujo de entrada se mantiene igual y con la misma concentración).
CASO 1: Supón que el flujo de salida es 25 cl/min. Calcula en ese supuesto la cantidad de

[2]Tomado de *Applied Mathematical Methods for Chemical Engineers* de Loney.

sal en el depósito cuando hayan transcurrido 7 min. más.
CASO 2: Supón que el flujo de salida es 1/6 l/min. Calcula en ese supuesto la cantidad de sal en el depósito cuando se empiece a desbordar, sabiendo que su capacidad total es 18 litros.
Solución: a) $t \approx 132,4$ min. b) $t \approx 211,7$ gr.

23 Obtener la ecuación diferencial de las circunferencias de radio 1, cuyos centros se encuentran en la recta $y = 2x$.

Solución: $(y-2x)^2(1+y'^2) = (2y+1)^2$

24 Obtener la ecuación diferencial de las parábolas cuyo eje de simetría es paralelo al eje OY y que son tangentes, simultáneamente, a las rectas $y = 0$ e $y = x$.

Solución: $xy'^2 - 2yy' + y = 0$

25 Obtener las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = Cx^4$.

Solución: e.d.o.: $y' = -\dfrac{x}{4y}$; $4y^2 + x^2 = C$

26 Obtener la ecuación de las trayectorias que cortan a la familia de curvas de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, bajo un ángulo de 45°.

Solución: e.d.o. $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$;

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$$

27 Obtener la ecuación de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales:

a. $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
b. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
c. $\mathbf{F} = (1, 2x, 0)$

Solución: a) $xy = C$;
b) $y = mx$;
c) $\begin{cases} y = x^2 + C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$

Test de autoevaluación

1 La curva que pasa por el punto $(0,1)$ y cumple que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es el triple que la abscisa del punto de contacto es:

A) $y = \dfrac{3}{2}x^2$

B) $y = \dfrac{3}{2}x^2 - 1$

C) $y = \dfrac{3}{2}x^2 + 1$

D) Ninguna de las anteriores.

2 El cambio de variable $x = e^t$ transforma la ecuación $3xy' + y = \dfrac{1}{x}$ en:

A) $y' + y = e^t$
B) $3y' + y = e^{-t}$.
C) $3y' - y = e^{-t}$
D) Ninguna de las anteriores.

3 La ecuación diferencial de la familia uniparamétrica de curvas definida por $y = C\sqrt{x^2+4}$ es:

A) $(x^2+4)y' = xy$
B) $(x^2+4)y' = 2xy$
C) $(x^2+4) = 2xyy'$
D) Ninguna de las anteriores.

4 La ecuación de la curva que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente $y' = -\dfrac{9x}{16y}$, es:

A) $8y^2 + 9x^2 = 25$
B) $16y^2 + 9x^2 = 25$
C) $16y^2 - 9x^2 = 25$
D) Ninguna de las anteriores.

5 Las trayectorias ortogonales a la familia $x^2 = Cy$, son:

A) $2y^2 - x^2 = K$

B) $y^2 + x^2 = K$

C) $2y^2 + x^2 = K$

D) Ninguna de las anteriores.

6 Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado 2. Si $f(1,1/2) = 3$, entonces

A) $f(4,2) = 48$

B) $f(4,2) = 16$

C) $f(4,2) = 24$

D) Ninguna de las anteriores.

7 Dada la ecuación diferencial $ydx + (1 + y^2 - x)dy = 0$, se puede afirmar que:

A) $\dfrac{1}{x^2}$ es un factor integrante.

B) $\dfrac{1}{y^2}$ es un factor integrante.

C) No tiene factor integrante.

D) Ninguna de las anteriores.

8 Las constantes *A* y *B*, tales que $y_p(x) = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ sea una solución de $y' + y = 2\operatorname{sen} x$, son :

A) $B = 0,\ A = 2$

B) $B = 2,\ A = 0$

C) $A = 1,\ B = -1$

D) Ninguna de las anteriores.

9 Una solución particular de la ecuación diferencial $y' + 2xy = 4x$ es de la forma,

A) $y_p = C(x)e^{-x^2}$

B) $y_p = C(x)e^{x^2}$

C) $y_p = Ce^{-x^2}$

D) Ninguna de las anteriores.

10 La ecuación de la isoclina $y' = 2$ de la familia de curvas $y = \operatorname{tg}\big(\log(Cx)\big)$ es:

A) $x = y^2$

B) $2x = 1 - y^2$

C) $2x = 1 + y^2$

D) Ninguna de las anteriores.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	C	A	B	C	A	C

Ejercicios resueltos

CONCEPTOS BÁSICOS

1 Comprobar que una familia de curvas es solución general de una ecuación diferencial y encontrar una solución particular que cumple distintas condiciones iniciales.

Realizar los ejercicios: 1, 2, 3, 4, 5, 14 del siguiente documento. Pinchando en el botón S podéis acceder a la solución.

2 Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas $y = C\,x + x^2$.

Solución

Para resolver este ejercicio se debe derivar la familia de curvas y eliminar la constante C del sistema formado por

$$\begin{cases} y = C\,x + x^2 \\ y' = C + 2x \end{cases}$$

Despejando C de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, resulta, $y' = \dfrac{y}{x} + x$.

3 Desde la página

https://www.giematic.unican.es/index.php/edos-primer-orden/material-interactivo

realiza el **ejercicio 1** del bloque **Conceptos básicos, existencia y unicidad**.

4 Sea C una constante arbitraria. Determinar si la ecuación $xy^2 - y^3 = C$ es solución de la ecuación diferencial $\left(2x - 3y\right)y' + y = 0$.

Solución

Basta derivar implícitamente respecto a x en la expresión de la familia de curvas y ver que cumple la ecuación. Derivando

$$y^2 + 2xyy' - 3y^2y' = 0 \Rightarrow y'\left(2xy - 3y^2\right) + y^2 = 0 \Rightarrow y'\left(2y - 3y\right) + y = 0$$

Sí es solución para todo valor de C.

5 Encontrar la ecuación diferencial cuaya solución general es $y\left(Cx - x^2\right) = 1$.

Solución

Derivando la ecuación diferencial se tendrá: $y'\left(Cx - x^2\right) + y\left(C - 2x\right) = 0$.

Eliminando la constante, $C = \dfrac{1 + yx^2}{yx}$, se tiene que

$$y'\frac{1}{y} + y\left(\frac{1 + yx^2}{yx} - 2x\right) = 0$$

Operando

$$y'\frac{1}{y} + \left(\frac{1 + yx^2 - 2yx^2}{x}\right) = 0 \qquad \boxed{y' = \frac{y^2x^2 - y}{x}}$$

6 Encontrar **todas** las soluciones de la ecuación diferencial $y' = x\sqrt{y}$.

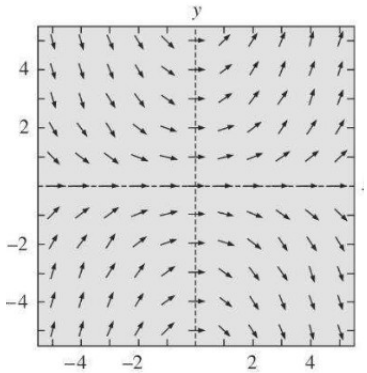
Solución

La ecuación $y' = x\sqrt{y}$ es de variables separables. Dividiendo por y, en el caso de que $y \neq 0$, se tiene que

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = x \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = xdx \Rightarrow \boxed{2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + C}$$

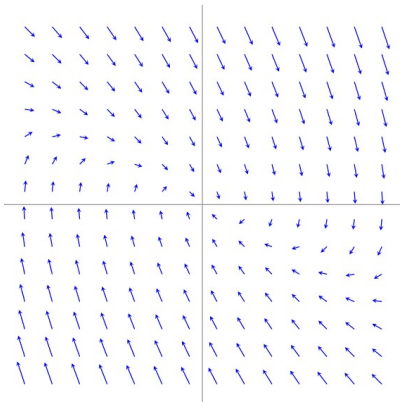
Además, como $\boxed{y = 0}$ es solución se tiene que será una solución singular.

7 (a) Se considera la siguiente figura



Indicar, justificando la respuesta, si puede ser una representación del campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = x^2$. Explicar cómo se obtiene el campo de direcciones de una edo de primer orden.

(b) Sin resolver la ecuación diferencial $y' = e^{x^2}$, ¿puede ser la siguiente figura el campo de direcciones de la edo dada? Justifica la respuesta.



Solución a)

No puede ser el campo de direcciones porque las pendientes en cada punto de la gráfica no son positivas.

Solución b)

No puede ser porque la pendiente de la solución en cada punto es positiva y, según el gráfico que muestra el campo de direcciones, hay puntos del plano en los que la pendiente es negativa.

8 Encontrar la solución de la ecuación diferencial $x^2y'+y=1$ que verifica $y(-1)=1$.

Solución

Resolviendo $x^2y'=1-y \Rightarrow \dfrac{y'}{1-y}=\dfrac{1}{x^2}$ $si\ y\neq 1,\ x\neq 0$. Antes de buscar la solución general veamos si $y=1,\ x=0$ son soluciones de la ecuación diferencial.

Como $y=1$ es solución de la ecuación diferencial y cumple con la condición dada $y(-1)=1$, se concluye que $y=1$ es la solución buscada.

Observad que la solución es única aplicando el teorema de existencia y unicidad considerando $y'=f(x,y)=\dfrac{1-y}{x^2}$.

9 Comprobar con Matlab Comprobar que $y(t)=A+Be^{kt/m}+mgt/k$ es una solución de la ecuación diferencial $my''=-mg+ky'$.

Solución

Se verifica con Matlab que la curva verifica la ecuación diferencial.

```
syms t y k m g A B
y=A+B*exp(k*t/m)+m*g*t/k;
aux1=m*diff(y,t,2)
aux2=-m*g+k*diff(y,t)
simplify(aux1-aux2)
```

E_01 Obtén la pendiente de la recta tangente a la curva solución de la EDO $y'=\dfrac{y^2+\cos(x)}{3x^2+y}$ en el punto $(0,3)$. ¿Existe solución única de la edo que pase por dicho punto?

Solución

La curva solución $y(x)$ que es solución del problema de valor inicial dado en la pregunta debe cumplir la ecuación luego $y'_{(0,3)}=\dfrac{3^2+\cos(0)}{3\cdot 0^2+3}=\dfrac{10}{3}$.

Aplicando el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden[3], el problema de valor inicial tiene una única solución al ser f y f'_y funciones continuas en un entorno del punto (0,3) siendo

[3] Nota: Leer las páginas 5 y 6 de los apuntes

$$f(x,y)=\frac{y^2+\cos(x)}{3x^2+y} \qquad f'_y(x,y)=\frac{2y(3x^2+y)-(y^2+\cos(x))}{(3x^2+y)^2}$$

E_02

Representa una muestra del campo de direcciones de la ecuación diferencial del apartado 2 en el rectángulo [0,3]x[-4, 4] considerando 5x6 puntos. Dibuja en la misma gráfica 6 curvas solución de la ecuación diferencial $(2+x+2y)dx+dy=0$ dando 6 valores a la constante de integración entre -10 y 4.

Solución

El código pedido es

```
%Campo de direcciones de la ecuación diferencial
[X,Y]=meshgrid(linspace(0,3,5),linspace(-4,4,6));
%Se dibujan como vectores en lugar de como segmentos
H=quiver(X,Y,ones(size(X)),-2-X-2*Y);
set(H, 'ShowArrowHead','off');
hold on
%Solución del problema de valor inicial
syms y(x) C1
sol(x,C1)=dsolve(diff(y)==-2-x-2*y)
%Representación de 6 curvas con 6 valores entre 10 y 4 para C1
for k=linspace(-10,4,6)
    fplot(sol(x,k),[0 3])
end
hold off
```

RESOLUCIÓN DE EDOS CON MATLAB

dsolve(ecuación,condiciones)

Devuelve la solución de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales o de frontera especificadas.

```
syms y(x)
ecuac=diff(y)+3*x==0;condion= y(0) ==4
sol(x)=dsolve(ecuac, y(0) ==4)
fplot(sol(x),[-3,3])
```

https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/apuntes/tema4n.pdf

10 (a) Resolver la EDO $y' = 1 + y^2$ y representar algunas curvas de la familia solución.

(b) Resolver la EDO $y' = 1 + y^2$ y obtener la solución particular correspondiente a la condición inicial (0,1).

Solución a)

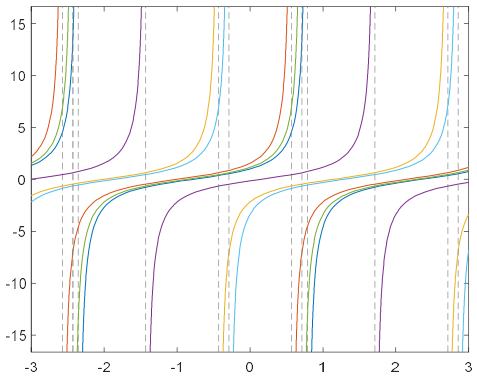
```
syms y(x)
ecuacion=diff(y)==1+y^2;
solu=dsolve(ecuacion)
```

La solución que da Matab es

```
solu(x) =
tan(C1 + x)
         1i
        -1i
```

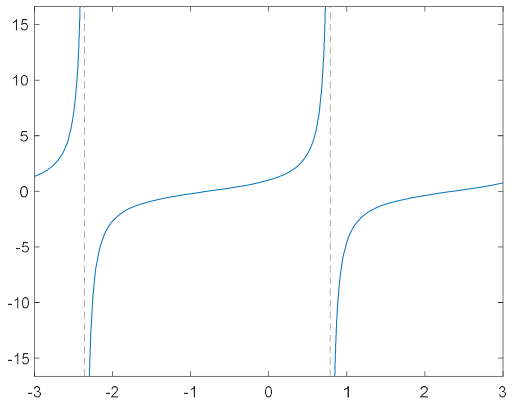
Para dibujar algunas curvas de la solución general se considera el siguiente código.

```
syms C1
sol(x,C1)=solu(1)
hold on
for k=1:5
    fplot(sol(x,k),[-3,3])
end
hold off
```



Solución b)

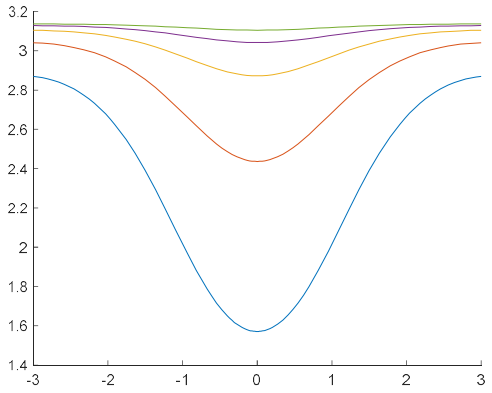
```
syms y(x)
ecuacion=diff(y)==1+y^2;
condicion=y(0)==1
sol(x)=dsolve(ecuacion,condicion)
fplot(sol(x),[-3,3])
```



11 Se considera la ecuación diferencial $y' = sen(y)sen(t)$. Representar varias curvas solución.

Solución

```
syms y(x)
ecuacion=diff(y)==sin(x)*sin(y);
solu=dsolve(ecuacion)
sol(x,C1)=solu(1)
syms C1
hold on
for k=1:5
    fplot(sol(x,k),[-3,3])
end
hold off
```

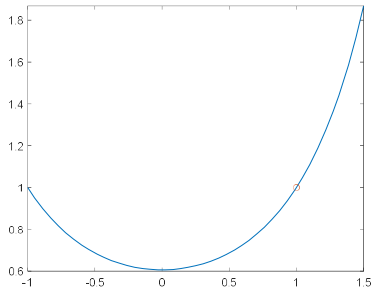


12 Encontrar una curva cuya gráfica pase por el punto (1,1) y que la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica sea igual al producto de las coordenadas del punto. Representar dicha curva.

Solución

```
syms y(x)
ecuacion=diff(y)==x*y;
```

```
vinicial=y(1)==1;
sol(x)=dsolve(ecuacion,vinicial)
fplot(sol(x),[-1 1.5])
hold on
plot(1,1,'o')
hold off
```



13 Escribir el código Matlab para

(a) Comprobar si la curva $y = \dfrac{x}{\cos x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' - y = x^2 \sec x \, \tan x$.

(b) Representar 10 curvas solución de la ecuación diferencial $y' = y + sen(x)$ junto con la curva solución que pasa por el punto (1,2).

(c) Representar el campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = -\dfrac{x}{y}$ en el rectángulo R=[0,3]x[-1,4] y representar la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto (1,2). ¿Qué representa el campo de direcciones de una ecuación diferencial?

Solución (a)

Basta sustituir en la ecuación diferencial y ver que se cumple. Con el código Matlab siguiente

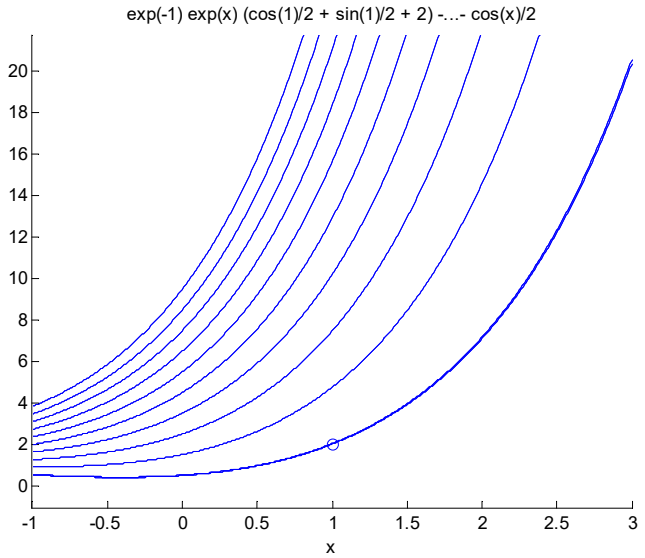
```
syms x
y=x/cos(x);
simplify(x*diff(y)-y-x^2*sec(x)*tan(x))
```

obtenemos que sí es solución al obtener 0 como valor de la última orden Matlab.

Solución (b)

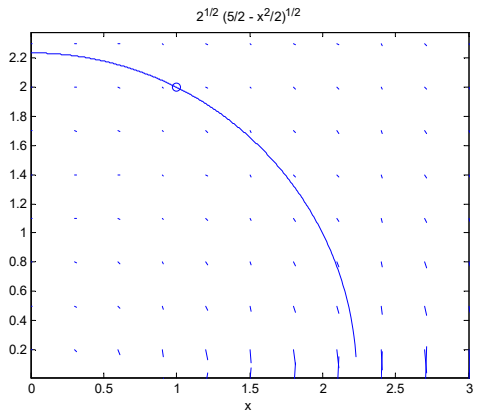
```
%Resolvemos la ecuación diferencial dada
syms y(x)
sol(x,C1)=dsolve(diff(y,x)==y+sin(x))
hold on
for k=1:10
   fplot(sol(x,k),[-1,3])
end
%Representamos la solución particular que pasa por (1,2)
```

```
sol1(x)=dsolve(diff(y,x)==y+sin(x),y(1)==2);
fplot(sol1(x),[-1,3])
plot(1,2,'o')
hold off
```

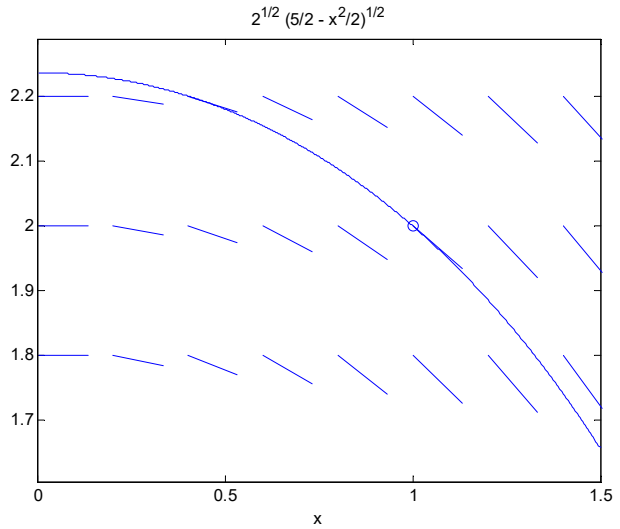


Solución (c)

```
[x,y]=meshgrid(0:0.3:3,-1:0.3:4);
[n,m]=size(x);
q=quiver(x,y,ones(n,m),-x./y)
set(q,'ShowArrowHead','off')
hold on
syms y(x)
ecuacion=diff(y,x)==-x/y;condicion=y(1)==2;
sol(x)=dsolve(ecuacion,condicion)
fplot(sol(x),[0,3])
plot(1,2,'o')
hold off
```



Acercándonos más al punto (1, 2) se aprecia el campo de direcciones



EDOs De Variables Separables

14 Encontrar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales, por separación de variables:

a) $dy = e^{3x-2y}dx$ b) $(1+y^2)dx = xdy$

c) $2x^2y\,dy = \left(1+x^2\right)dx$ d) $dy + y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0$

Solución a)

$$e^{2y}dy = e^{3x}dx \qquad \Rightarrow \qquad 2y = \log\left(\frac{2}{3}e^{3x} + C\right)$$

Solución b)

$$(1+y^2)dx = xdy \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+y^2}, \qquad x = 0, \qquad 1+y^2 = 0$$

Integrando se obtiene la solución general:

$$\log x = \mathrm{arctg}\,y + \log C \qquad \Rightarrow \qquad y = \mathrm{tg}\big(\log(Cx)\big)$$

$x = 0$, es solución singular.

Solución c)

Separamos las variables

$$2\,y\,dy = \frac{1+x^2}{x^2}dx = \left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx\,, \qquad x = 0$$

$$\int 2\,ydy = \int\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx \;\Rightarrow\; y^2 = -\frac{1}{x} + x + C$$

$x = 0$, es solución singular.

Solución d)

Procedemos de forma análoga a los casos anteriores:

$$\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx\,, \quad y = 0, \qquad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

$$\log\left|y\right| = \log C + \log\left|\cos x\right| = \log\left|C\cos x\right| \;\Rightarrow\; y = C\cos x$$

15 Resolver la ecuación diferencial $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$, utilizando el cambio de variable $xy = z$.

Solución

$$y = \frac{z}{x} \qquad \Rightarrow \qquad dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$$

Sustituyendo en la e.d.o. el valor de dy y escribiendo la ecuación en las nuevas variable z, x se tiene,

$$\frac{z}{x}\left(x\frac{z}{x}+1\right)dx + x\left(1 + x\frac{z}{x} + x^2\frac{z^2}{x^2}\right)\frac{xdz - zdx}{x^2} = 0$$

$$\frac{z}{x}(z+1)dx + x(1+z+z^2)\frac{xdz - zdx}{x^2} = 0$$

$$z(z+1)dx + (1+z+z^2)(xdz - zdx) = 0$$

$$(z^2 + z - z - z^2 - z^3)dx + x(1+z+z^2)dz = 0$$

$$z^3dx - x\left(1+z+z^2\right)dz = 0$$

que es de variables separables:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+z+z^2}{z^3}dz\,, \quad x = 0\,, \quad z = 0$$

Integrando miembro a miembro, se llega a

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+z+z^2}{z^3}dz \;\rightarrow\; \log\left|x\right| = \int\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right)dz = -\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z} + \log\left|z\right| + C$$

y, deshaciendo el cambio de variable se obtiene la solución general,

$$2x^2y^2\log\left|y\right| - 2xy - 1 = Cx^2y^2$$

A esta solución añadiremos las soluciones singulares: $x = 0, \quad y = 0$.

Se puede comprobar que la solución general obtenida es correcta, derivando implícitamente respecto de x la expresión,

$$2\log y - \frac{2}{xy} - \frac{1}{x^2y^2} = C$$

Derivamos

$$\frac{2y'}{y} + \frac{2(y+xy')}{x^2y^2} + \frac{2(xy^2+x^2yy')}{x^4y^4} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2y'}{y} + \frac{2(y+xy')}{x^2y^2} + \frac{2(y+xy')}{x^3y^3} = 0$$

dividiendo entre 2 y multiplicando por x^3y^3, se tiene

$$x^3y^2y' + xy^2 + x^2yy' + y + xy' = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2y^2+xy+1)y' + y(xy+1) = 0$$

cambiando $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se obtiene finalmente,

$$y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$$

que es la ecuación diferencial del enunciado.

E_01 Calcular todas las soluciones de la ecuación diferencial $\dfrac{y'}{2} - x\sqrt{y} = 0$.

Solución

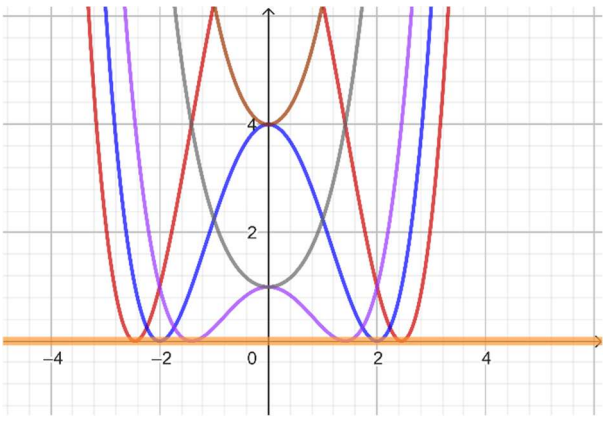
La ecuación es de variables separables, para resolver la ecuación $\dfrac{y'}{2} - x\sqrt{y} = 0$ se tiene

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = xdx \qquad y \neq 0$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + C \qquad y \neq 0$$

Como y=0 es solución de la EDO, se trata de una solución singular. Como se puede ver en el gráfico esta solución es la envolvente de la familia de curvas general.



EDOs HOMOGÉNEAS

16 ¿Es homogénea la función $f\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^2+7xy}$?

¿Y la función $g\left(x,y\right)=\cos\left(\dfrac{7xy+y^2}{x^2+yx}\right)$?

Solución

Sí, la primera es de orden 2/3, la segunda de orden O.

17 Determinar si la siguiente función $f\left(x,y\right)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{y^2}{x^2}+e^{-2y/x}+6$ es homogénea y, en caso afirmativo, indicar su grado.

Solución

Es homogenea de orden 0 ya que $f\left(tx,ty\right)=t^0 f\left(x,y\right)$

18 Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas siguientes:

a) $ydx-\left(x+y\right)dy=0$ b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$ c) $(x^2-2y^2)dx+xydy=0$

Solución a)

Comprobamos que la ecuación diferencial $ydx-\left(x+y\right)dy=0$ es homogénea. Despejamos y', así:

$$y'=\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{y}{x+y}=f(x,y)\ ,\quad \text{siendo}\quad f(tx,ty)=\frac{t\,y}{t\,x+t\,y}=f(x,y)$$

Como la función $f(x,y)$ es homogénea de grado cero en sus argumentos, la e.d.o. es homogénea. Se resuelve haciendo el cambio:

$$\frac{y}{x}=u \quad\Rightarrow\quad y=ux \quad\Rightarrow\quad dy=udx+xdu$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial inicial y separando variables, tenemos:

$$u\,xdx-(x+ux)(u\,dx+x\,du)=0$$

$$(u\,x-x\,u-u^2x)dx=(x+u\,x)xdu \quad\Rightarrow\quad -u^2xdx=x^2(1+u)du$$

$$-\frac{d\,x}{x}=\frac{1+u}{u^2}du,\quad x=0,\quad y=0\quad\Rightarrow\quad -\int\frac{d\,x}{x}=\int\frac{1+u}{u^2}du=\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right)du\quad\Rightarrow$$

$$-\log|x|=-\frac{1}{u}+\log|u|+\log C$$

Deshaciendo el cambio:

$$-\log|x|=-\frac{x}{y}+\log\left|\frac{y}{x}\right|+\log C\quad\Rightarrow\quad\log\left|\frac{y}{x}\right|=-\log|x|+\log\left(e^{x/y}\right)+\log K$$

$$\log\left|\frac{y}{x}\right|=\log\left|\frac{Ke^{x/y}}{x}\right|\quad\Rightarrow\quad y=Ke^{x/y}$$

Soluciones singulares: $x=0,\quad y=0$.

Solución b)

La segunda ecuación también es homogénea, ya que:

$$y'=\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=f(x,y)\ ,\ \text{siendo}\ \ f(tx,ty)=\frac{t\,y}{t\,x}-\frac{t\,x}{t\,y}=f(x,y)$$

Efectuamos el cambio: $\frac{y}{x}=u\quad\Rightarrow\quad y=ux\quad\Rightarrow\quad dy=udx+xdu$.

Sustituimos en la ecuación:

$$\frac{xdu+udx}{dx}=u-\frac{1}{u}\quad\Rightarrow\quad xdu+udx=udx-\frac{1}{u}dx\quad\Rightarrow\quad udu=-\frac{1}{x}dx$$

Integrando:

$$\int udu=-\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\frac{u^2}{2}=-\log|x|+\log C$$

Deshaciendo el cambio quedará:

$$\frac{y^2}{2\,x^2}=-\log|x|+\log C\quad\Rightarrow\quad\frac{y^2}{2\,x^2}+\log|x|=K$$

Solución c)

Es una ecuación homogénea, por tanto, el cambio es:

$$y=zx\quad\Rightarrow\quad dy=zdx+xdz$$

Sustituyendo en la edo, se obtiene una ecuación de variables separables

$$(1-z^2)dx+zxdz=0\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{x}=\frac{zdz}{z^2-1}$$

Y, resolviendo,

$$\log Cx = \frac{1}{2}\log(z^2-1) \qquad \Rightarrow \qquad Cx = \sqrt{z^2-1}$$

Finalmente, deshaciendo el cambio se obtiene la solución general $y^2 = x^2 + Cx^4$.

Además son soluciones singulares $x = 0$, $y = x$, $y = -x$.

19 Encuentra la solución general y las soluciones singulares de la ecuación diferencial $\left(3x^2 - y^2\right)y' = 2xy$.

Solución

Como es una EDO homogénea, consideramos el cambio $y = zx \to y' = z'x + z$, se tendrá

$$\left(3-z^2\right)\left(z'x+z\right) = 2z \to \left(3-z^2\right)x\,z' = 2z - z\left(3-z^2\right) \to$$

$$\to \left(3-z^2\right)x\,z' = -z + z^3 \to \frac{\left(3-z^2\right)}{z\left(z^2-1\right)}dz = \frac{dx}{x} \qquad si\ \ z \neq 0, \pm 1$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\left(3-z^2\right)}{z\left(z^2-1\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1} \to \begin{cases} A\left(z-1\right)\left(z+1\right) + Bz\left(z+1\right) + Cz\left(z-1\right) = 3 - z^2 \\ A = -3,\ \ B = 1,\ \mathrm{C} = -1 \end{cases}$$

Integrando la expresión

$$\int \frac{\left(3-z^2\right)}{z\left(z^2-1\right)}dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{-3}{z}dz + \int \frac{1}{z-1}dz + \int \frac{1}{z+1}dz = \int \frac{dx}{x}$$

se obtiene como solución general

$$\log\left|z^2-1\right| - 3\log\left|z\right| = \log\left|x\right|$$

$$\frac{z^2-1}{z^3} = Cx \to \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C\frac{y^3}{x^2} \to y^3 = C\left(y^2 - x^2\right)$$

Las soluciones singulares son $y = x$, $y = -x$, que se obtienen de considerar las soluciones de la ecuación diferencial no incluidas en la solución general a partir de $z = 0, z = 1,\ z = -1$.

20 Resolver la ecuación diferencial $\left(4x^2 + 3y^2\right)dx + 2xydy = 0$

Solución

La ecuación diferencial es homogénea

$$y' = -\frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$$

haciendo el cambio $z = \dfrac{y}{x}$ $\rightarrow$ $y' = z'x + z$ se tiene

$$z'x + z = -\frac{4 + 3z^2}{2z}$$

Operando

$$z'x = -\frac{4 + 3z^2}{2z} - z = \frac{-4 - 3z^2 - 2z^2}{2z} = \frac{-4 - 5z^2}{2z}$$

$$z'x = -\frac{4 + 5z^2}{2z} \Rightarrow \frac{2z}{4 + 5z^2}dz = -\frac{dx}{x}$$

Resolviendo

$$\frac{1}{5}\log\left(4 + 5z^2\right) = -\log|x| + C \Rightarrow \left(4 + 5z^2\right)^{1/5} = |x|^{-1} e^C \Rightarrow 4 + 5z^2 = \frac{C}{x^5}$$

Deshaciendo el cambio

$$4 + 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C}{x^5} \Rightarrow \boxed{4x^5 + 5x^3y^2 = C} \quad C \in \mathbb{R}$$

Nota: También se puede resolver utilizando un factor integrante.

E_01 Determinar si la función $f(x,y) = x^2 + \sqrt{y^4 - x^2y^2} - \dfrac{x^2y + xy^2}{x} + \dfrac{x^5}{y^3}$ es homogénea justificando la respuesta.

Solución

Comprobamos que la función es homogénea de orden 2

$$f(tx,ty) = t^2x^2 + \sqrt{t^4y^4 - t^4x^2y^2} - \frac{t^3x^2y + t^3xy^2}{tx} + \frac{t^5x^5}{t^3y^3} =$$

$$= t^2x^2 + t^2\sqrt{y^4 - x^2y^2} - t^2\frac{x^2y + xy^2}{x} + t^2\frac{x^5}{y^3} = t^2 f(x,y)$$

EDOs Exactas. Factor Integrante

21 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes exactas:

a) $(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y)dy = (e^y + \cos x \cos y)dx$ b) $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$

Solución a)

Comprobamos si es diferencial exacta:

$$\left.\begin{array}{lll} M(x,y) = -e^y - \cos x \cos y & \Rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y} = -e^y + \cos x \operatorname{sen} y \\ N(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y & \Rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x} = -e^y + \cos x \operatorname{sen} y \end{array}\right\}$$

Buscamos la solución:

$$f(x,y) = -\int \left(e^y + \cos x \cos y\right) dx = -\left(xe^y + \operatorname{sen} x \cos y\right) + \phi(y)$$

Derivando esta solución e igualando a $N(x,y)$, se obtiene $\phi(y)$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y + \phi'(y) \\ N(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = C$$

La solución es:

$$xe^y + \operatorname{sen} x \cos y = C$$

Solución b)

Es exacta, ya que las funciones $M(x,y) = x^2 - y$, $N(x,y) = y^2 - x$ son continuas en $\mathbb{R}^2$ y además verifican:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -1 .$$

Para obtener la función $f(x,y)$ que nos resuelve el problema, planteamos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & M(x,y) = x^2 - y = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 2) & N(x,y) = y^2 - x = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right\}$$

Integramos ahora bien la ecuación (1) respecto a x, o bien la ecuación (2) respecto a y. En este caso, integramos la ecuación (1) así:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int (x^2 - y) dx \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \frac{x^3}{3} - yx + g(y)$$

La función $g(y)$ es una función de y que tenemos que determinar, actúa como una constante de integración en el proceso de integrar respecto a x la función $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, que depende de dos variables x e y. La expresión de $f(x,y)$ que hemos obtenido al integrar la ecuación (1) la sustituimos ahora en la ecuación (2), resultando:

$$y^2 - x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} - yx + g(y)\right) = -x + g'(y)$$

Identificando ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$y^2 = g'(y) \quad \Rightarrow \quad \int g'(y)dy = \int y^2 dy \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{y^3}{3} + C_1$$

Sustituyendo en la función f(x,y) nos queda como solución de la ecuación diferencial

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - y\,x + \frac{y^3}{3} = C$$

22 Encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$\left(e^x + y\right)dx + \left(2 + x + ye^y\right)dy = 0$$

Encontrar la solución que pase por el punto (0,1).

Solución

La ecuación diferencial es exacta

$$M\left(x,y\right) = e^x + y \qquad N\left(x,y\right) = 2 + x + ye^y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Existe entonces una función $u\left(x,y\right)$ de forma que $du = Mdx + Ndy$. Para calcular la función

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y \quad \rightarrow u\left(x,y\right) = e^x + yx + h\left(y\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 + x + ye^y \qquad (1)$$

Derivando u respecto de la variable y, y teniendo en cuenta (1)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 + x + ye^y = x + h'\left(y\right)$$

$$h'\left(y\right) = 2 + ye^y \quad \rightarrow \quad h\left(y\right) = 2y + ye^y - e^y + C$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$u\left(x,y\right) = C$$
$$e^x + yx + 2y + ye^y - e^y = C$$

Si se quiere que pase por el punto (0,1) , el valor de C es 3.

23 Resolver la siguiente edo $\operatorname{sen}\left(xy\right) + xy\cos\left(xy\right) + x^2\cos\left(xy\right)y' = 0$.

Solución

Se trata de una ecuación diferencial exacta ya que

$$\left(\operatorname{sen}\left(xy\right) + xy\cos\left(xy\right)\right)dx + x^2\cos\left(xy\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}\left(xy\right)+xy\cos\left(xy\right)\right)=x\cos\left(xy\right)+x\cos\left(xy\right)-x^2ysen\left(xy\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\cos\left(xy\right)\right]=2x\cos\left(xy\right)-x^2ysen\left(xy\right)$$

Calculamos f de forma que

$$\begin{array}{ll}\left(I\right) & f_x^{'}=\operatorname{sen}\left(xy\right)+xy\cos\left(xy\right)\\ \left(II\right) & f_y^{'}=x^2\cos\left(xy\right)\rightarrow f\left(x,y\right)=xsen\left(xy\right)+h\left(x\right)\end{array}$$

Sustituyendo en (I)

$$sen\left(xy\right)+xy\cos\left(xy\right)+h'\left(x\right)=\operatorname{sen}\left(xy\right)+xy\cos\left(xy\right)\Rightarrow h'\left(x\right)=0\Rightarrow h\left(x\right)=C$$

La función es $f\left(x,y\right)=xsen\left(xy\right)$ y la solución es $\boxed{xsen\left(xy\right)=C}$ siendo C un número real.

24 Determina si la siguiente ecuación $y'+2y=3t$ admite un factor integrante de la forma e^{at+b}

Solución

Se multiplica la ecuación por el posible factor integrante

$$\underbrace{e^{at+b}\left(2y-3t\right)}_{=M\left(t,y\right)}dt+\underbrace{e^{at+b}}_{=N\left(t,y\right)}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}\Leftrightarrow 2e^{at+b}=ae^{at+b}\Leftrightarrow a=2$$

La función $\mu\left(t\right)=e^{2t+b}$ es un factor integrante para cualquier valor de b.

25 Dada la siguiente ecuación diferencial,

$$\left(y^3+2e^xy\right)dx+\left(e^x+3y^2\right)dy=0$$

se pide encontrar la solución general sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu\left(x\right)$.

Solución

Se puede comprobar que la ecuación diferencial no es exacta. Como se dice en el enunciado que admite un factor integrante del tipo $\mu\left(x\right)$ se deberá cumplir que la siguiente ecuación tendrá que ser exacta:

$$\underbrace{\mu\left(x\right)\left(y^3+2e^xy\right)}_{M\left(x,y\right)}dx+\underbrace{\mu\left(x\right)\left(e^x+3y^2\right)}_{N\left(x,y\right)}dy=0$$

En consecuencia, se tendrá que cumplir $N'_x = M'_y$

$$\mu'(x)\left(e^x + 3y^2\right) + \mu(x)e^x = \mu(x)\left(3y^2 + 2e^x\right)$$

$$\mu'(x)\left(3y^2 + e^x\right) = \mu(x)\left(e^x + 3y^2\right)$$

$$\mu(x) = \mu'(x) \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = 1 \Rightarrow \log\mu(x) = x \Rightarrow \mu(x) = e^x$$

Como la ecuación es exacta:

$$\left(e^x y^3 + 2e^{2x}y\right)dx + \left(e^{2x} + 3e^x y^2\right)dy = 0$$

Se busca u de forma que

$$du = \left(e^x y^3 + 2e^{2x}y\right)dx + \left(e^{2x} + 3e^x y^2\right)dy$$

Se cumplirá

$$\begin{aligned} u'_x &= e^x y^3 + 2e^{2x}y \qquad (1) \\ u'_y &= e^{2x} + 3e^x y^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

De la igualdad (1) se tendrá

$$u = e^x y^3 + e^{2x}y + h(y)$$

Aplicando (2)

$$3e^x y^2 + e^{2x} + h'(y) = e^{2x} + 3e^x y^2 \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = A$$

La función u buscada es

$$u(x,y) = e^x y^3 + e^{2x}y + A$$

Y la solución de la ecuación diferencial es $u(x,y) = C$

$$e^x y^3 + e^{2x}y = C$$

26 Resolver la ecuación diferencial $xy' + 2y = x^2 - x + 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$ sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$.

Solución

La ecuación

$$\underbrace{\left(2y - x^2 + x - 1\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{x}_{N(x,y)}\,dy = 0$$

no es exacta. Para obtener el factor integrante que dependa de x, se tendrá que cumplir que

$$\underbrace{\mu(x)\left(2y-x^2+x-1\right)}_{M_1(x,y)}dx+\underbrace{\mu(x)x}_{N_1(x,y)}dy=0$$

sea exacta. Por lo tanto,

$$2\mu(x)=\mu'(x)x+\mu(x)\Rightarrow \mu'(x)x=\mu(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{1}{x}\Rightarrow \log\mu(x)=\log x\Rightarrow \mu(x)=x$$

El factor integrante será entonces $\mu(x)=x$. Multiplicando la ecuación diferencial dada por este factor se tendrá que la siguiente ecuación diferencial es exacta

$$\left(2yx-x^3+x^3-x\right)dx+x^2dy=0$$

Obteniendo la solución general de dicha ecuación diferencial se tendrá la solución pedida

$$x^2y-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}=\frac{1}{12}$$

27 Determinar un factor integrante de la forma $\mu=x^my^n$ para la ecuación diferencial $\left(-3y+2x^3y^3\right)dx+\left(4x-3x^4y^2\right)dy=0$

Solución

Al multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante se tendrá que la siguiente ecuación será exacta

$$x^my^n\left(-3y+2x^3y^3\right)dx+x^my^n\left(4x-3x^4y^2\right)dy=0$$

$$\left(\underbrace{-3x^my^{n+1}+2x^{m+3}y^{n+3}}_{M}\right)dx+\left(\underbrace{4x^{m+1}y^n-3x^{m+4}y^{n+2}}_{N}\right)dy=0$$

Por lo tanto, se tiene que cumplir $M_y'=N_x'$, es decir,

$$-3x^m(n+1)y^n+2x^{m+3}(n+3)y^{n+2}=4(m+1)x^my^n-3(m+4)x^{m+3}y^{n+2}$$

$$-3(n+1)x^my^n+2(n+3)x^{m+3}y^{n+2}=4(m+1)x^my^n-3(m+4)x^{m+3}y^{n+2}$$

$$\begin{aligned}-3(n+1)&=4(m+1)\\ 2(n+3)&=-3(m+4)\end{aligned}\qquad \begin{aligned}3n+4m&=-7\\ 2n+3m&=-18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-6n-8m&=14\\ 6n+9m&=-54\end{aligned}\qquad \boxed{m=-40}\qquad 3n=-7+160=153\Rightarrow \boxed{n=51}$$

El factor integrante es $\mu\left(x,y\right)=x^{-40}y^{51}$.

28 De la ecuación diferencial $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ se sabe que admite un factor integrante que depende solo de y. Deducir la expresión de dicho factor integrante. Aplicarlo a la siguiente ecuación diferencial $xdx+\left(x^2y+4y\right)dy=0$ y calcular la solución cumpliendo $y\left(4\right)=0$.

Solución

Si la ecuación diferencial $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$, admite un factor integrante dependiente de y se tendrá que la siguiente ecuación es exacta

$$\underbrace{\mu\left(y\right)M\left(x,y\right)}_{=M_1\left(x,y\right)}dx+\underbrace{\mu\left(y\right)N\left(x,y\right)}_{=N_1\left(x,y\right)}dy=0$$

Por lo tanto, se cumplirá

$$\frac{\partial M_1\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{\partial N_1\left(x,y\right)}{\partial x}$$

es decir,

$$\mu'\left(y\right)M\left(x,y\right)+\mu\left(y\right)M_y'\left(x,y\right)=\mu\left(x\right)N_x'\left(x,y\right)$$

Se cumplirá que

$$\mu'\left(y\right)M\left(x,y\right)=-\mu\left(y\right)\left[M_y'\left(x,y\right)-N_x'\left(x,y\right)\right]$$

$$\frac{\mu'\left(y\right)}{\mu\left(y\right)}=-\frac{M_y'\left(x,y\right)-N_x'\left(x,y\right)}{M\left(x,y\right)}$$

Integrando

$$\log\mu\left(y\right)=\int\frac{N_x'\left(x,y\right)-M_y'\left(x,y\right)}{M\left(x,y\right)}dy$$

$$\mu\left(y\right)=e^{\int\frac{N_x'\left(x,y\right)-M_y'\left(x,y\right)}{M\left(x,y\right)}dy}$$

En el caso de la ecuación diferencial dada, será

$$\mu\left(y\right)=e^{\int\frac{2xy}{x}dy}=e^{\int 2ydy}=e^{y^2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante se tendrá,

$$e^{y^2}x\ dx+e^{y^2}\left(x^2y+4y\right)dy=0$$

Buscamos f de forma que $df = e^{y^2} x\ dx + e^{y^2}\left(x^2 y + 4y\right) dy = 0$. Para ello se tendrá que cumplir

$$f_x' = e^{y^2} x \rightarrow f\left(x,y\right) = e^{y^2}\frac{x^2}{2} + h\left(y\right)$$

$$f_y' = e^{y^2}\left(x^2 y + 4y\right) \rightarrow e^{y^2}\left(x^2 y + 4y\right) = e^{y^2} 2y\frac{x^2}{2} + h'\left(y\right) \rightarrow h'\left(y\right) = 4ye^{y^2} \rightarrow h\left(y\right) = 2e^{y^2}$$

La función es, por lo tanto, $f\left(x,y\right) = e^{y^2}\frac{x^2}{2} + 2e^{y^2}$. La solución de la ecuación diferencial será

$$\boxed{e^{y^2}\left(x^2 + 4\right) = C}$$

Para hallar la curva solución para $y\left(4\right) = 0$, se calcula el valor de C que cumple $e^0\left(16 + 4\right) = C \Rightarrow C = 20$. La curva solución que pasa por el punto (4,0) es $\boxed{e^{y^2}\left(x^2 + 4\right) = 20}$.

29 Dada la ecuación diferencial $x + y + \left(y - x\right) y' = 0$, ¿admite un factor integrante de la forma $\frac{1}{x^2 + y^2}$? Nota: No se pide resolver la ecuacion diferencial.

Solución

Veamos que la ecuación diferencial siguiente es exacta

$$\frac{1}{x^2 + y^2}\left(x + y\right) dx + \frac{1}{x^2 + y^2}\left(y - x\right) dy = 0$$

Como se cumple

$$M\left(x,y\right) = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(x + y\right) \rightarrow M_y'\left(x,y\right) = \frac{\left(x^2 + y^2\right) - \left(x + y\right) 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$N\left(x,y\right) = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(y - x\right) \rightarrow N_x'\left(x,y\right) = \frac{-\left(x^2 + y^2\right) - \left(y - x\right) 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Es factor integrante ya que se cumple $M_y'\left(x,y\right) = N_x'\left(x,y\right)$

EDOs LINEALES

30 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes lineales:

a) $xy' - 3y = x^4$ b) $(1 + x^2)dy + 2xydx = \operatorname{cotg} x dx$

Solución a)

a) $xy' - 3y = x^4$

Dividimos entre x, suponiendo $x \neq 0$: $y' - \frac{3}{x}y = x^3$ (forma canónica)

Método del factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{\log\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3}$$

Multiplicando por este factor resulta la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x^3}y' - \frac{3}{x^4}y = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^3}y\right)' = 1$$

Integrando

$$\frac{1}{x^3}y = \int dx \Rightarrow y = x^3\left(x + C\right) = x^4 + Cx^3$$

$x = 0$, no es solución.

Método de la solución particular más la homogénea: $y = y_h + y_p$

Homogénea:

$$y' - \frac{3}{x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{3}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \log y = \log Cx^3 \quad \Rightarrow \quad y_h = Cx^3$$

Particular:

$$y_p = x^3 C(x) \quad \Rightarrow \quad y_p' = x^3 C'(x) + 3x^2 C(x)$$

Sustituyendo en la ecuación completa se tiene,

$$x^4 C'(x) + 3x^3 C(x) - 3x^3 C(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x$$

Por lo tanto,

$$y = y_h + y_p = Cx^3 + x^4$$

Solución b)

Resolvemos la ecuación lineal $(1 + x^2)dy + 2xydx = \operatorname{cotg} x dx$

Método del factor integrante:

Dividimos entre $\left(1 + x^2\right)dx \neq 0$ para obtener la forma canónica de la ecuación:

$$y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{\operatorname{cotg} x}{1 + x^2}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)} = 1 + x^2$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx\right) = \frac{1}{1+x^2}\left(\int \operatorname{cotg} x dx\right) = \frac{1}{1+x^2}\left(\log\left|\operatorname{sen} x\right| + C\right)$$

31 Resolver la ecuación diferencial $y' + 2xy = 4x$

Solución

La solución general de la ecuación completa es $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$.

Primero se resuelve la ecuación homogénea, que es de variables separadas

$$y' + 2xy = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2x dx \quad \rightarrow \quad \log|y| = -x^2 + \log C \quad \rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}$$

Buscamos una solución particular de la ecuación completa:

$$y_p(x) = C(x)e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad y'_p(x) = e^{-x^2}\left(C'(x) - 2xC(x)\right)$$

Sustituyendo en la ecuación inicial

$$y_p' + 2xy_p = 4x \quad \rightarrow \quad e^{-x^2}\left(C'(x) - 2xC(x)\right) + 2xC(x)e^{-x^2} = 4x$$

$$e^{-x^2}C'(x) = 4x \quad \rightarrow \quad C(x) = \int 4x\, e^{x^2} dx = 2e^{x^2}$$

$$y(x) = Ce^{-x^2} + 2\, e^{x^2} e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + 2$$

32 Obtener la curva solución de la ecuación diferencial

$$\left(1 + x^2\right)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{x}{1+x^2}$$

que pasa por el punto (1,2).

Solución

Se trata de una ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Se resuelve la ecuación homogénea: $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = 0$ que es de variables separadas

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2x}{1+x^2}dx \qquad \Rightarrow \log y = -\log\left(1+x^2\right) \Rightarrow y_H = \frac{C}{1+x^2}$$

Se resuelve la ecuación particular de la completa considerando: $y_p = \dfrac{C(x)}{1+x^2}$. Sustituyendo en la ecuación completa

$$\left(1+x^2\right)y_p' + 2x\,y_p' = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\frac{C'(x)}{1+x^2} - \frac{C(x)2x}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{2xC(x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow C'(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$$

La solución de la ecuación diferencial será: $y = y_H + y_p = \dfrac{C}{1+x^2} + \dfrac{\log\left(1+x^2\right)}{2\left(1+x^2\right)}$

Para encontrar la curva que pasa por el punto (1, 2) se sustituye x=1, y=2 y se obtiene el valor de C asociado a dicha curva

$$2 = \frac{C}{1+1} + \frac{\log(1+1)}{2(1+1)} \Rightarrow \frac{C}{2} = 2 - \frac{\log 2}{4} \Rightarrow C = 4 - \frac{\log 2}{2}$$

La curva será $y = \dfrac{8-\log 2}{2\left(1+x^2\right)} + \dfrac{\log\left(1+x^2\right)}{2\left(1+x^2\right)}$

33 Dada la ecuación diferencial $y' = \cos x - y$. Se pide

a) Encontrar la solución general

b) Justifica si se verifica el teorema de existencia

c) Representar la isoclina de pendiente cero.

Solución a)

Es una ecuación lineal. La solución general del homogeneo es

$$y' + y = 0 \to \frac{dy}{y} = -dx \to \log|y| = -x \to y_H = ce^{-x}$$

Para encontrar la solución particular de la completa se considera $y_p = C(x)e^{-x}$. Como se tiene que cumplir

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} = \cos(x) - C(x)e^{-x} \to C'(x)e^{-x} = \cos(x) \to$$

$$C(x) = \int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\cos(x) + sen(x)\right)$$

Por lo tanto, $y_p = C(x)e^{-x} = \dfrac{\cos x + senx}{2}$. La solución general es

$$y = y_H + y_p = ce^{-x} + \frac{\cos x + senx}{2}$$

Nota: Al ser una ecuación lineal $y' + p(x)y = q(x)$ también se puede resolver como exacta utilizando el factor integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^x$

Solución b)

Como tanto $f(x,y) = \cos x - y$ como $f'_y(x,y) = -1$ son funciones continuas en todo el plano, existe solución única de la ecuación cumpliendo $y(x_o) = 0$ para cualquier x_o. Es decir, para cada punto del plano pasa una solución y sólo una.

Solución c)

La isoclina de pendiente 0 es $y' = h(x,y) = 0 \to \cos x - y = 0$

34 Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + 3y - e^{-3x} = 0, \qquad y(1) = 5$$

Solución

La solución general de la ecuación homogénea $y' + 3y = 0$, es

$$y_H(x) = Ce^{-3x} \quad C \in \mathbb{R}$$

Como solución particular se considera $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$, se cumplirá

$$\left(C'(x) - C(x)\right)e^{-3x} + 3C(x)e^{-3x} = e^{-3x} \Rightarrow C(x) = x \qquad y_p(x) = C(x)e^{-3x} = xe^{-3x}$$

Por tanto, la solución general es $y_G(x) = (x + C)e^{-3x}$, si se impone que pase por el punto (1, 5) es

$$y(1) = (1 + C)e^{-3} = 5 \qquad \Rightarrow \qquad C = 5e^3 - 1$$

La solución es $y(x) = \left(x + 5e^3 - 1\right)e^{-3x}$.

35 Resolver la siguiente ecuación diferencial usando el método de variación de las constantes $y' = 5y + \cos(x)$.

Solución

La ecuación diferencial es lineal, luego la solución general es $y_G = y_{GH} + y_p$.

- La solución general del homogéneo es

$$y' = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5\,dx \Rightarrow \log|y| = 5x + C \Rightarrow |y| = e^{5x}e^{C} \Rightarrow y = Ce^{5x}$$

- Para calcular la solución particular

$$y_p = C(x)e^{5x} \qquad y_p' = C'(x)e^{5x} + 5C(x)e^{5x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$C'(x)e^{5x} + 5C(x)e^{5x} = 5C(x)e^{5x} + \cos(x) \Rightarrow C'(x) = \cos(x)e^{-5x}$$

Integrando por partes

$$C(x) = \frac{e^{-5x}}{26}\left(-5\cos(x) + sen(x)\right)$$

Por lo tanto $y_p = -\frac{5}{26}\cos(x) + \frac{1}{26}sen(x)$

La solución de la ecuación diferencial es $y_G = Ce^{5x} - \frac{5}{26}\cos(x) + \frac{1}{26}sen(x)$

36 Resolver el siguiente problema de valor inicial $xy' - 4y = x^6e^x \quad , \quad y(1) = 2$

Solución

e trata de una ecuación diferencial de primer orden lineal. $y' + p(x)y = q(x)$

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x \qquad p(x) = -\frac{4}{x},\ q(x) = x^5e^x$$

Consideramos como factor integrante: $\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\log x} = \frac{1}{x^4}$.

Por lo tanto

$$\frac{1}{x^4}y' - \frac{4}{x^5}y = xe^x$$

y se tiene

$$\mu(x)y = \int xe^x dx \qquad \frac{1}{x^4}y = xe^x - e^x + C$$

Luego la solución general es

$$y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

para $y(1) = 2 \Rightarrow C = 2$. La solución particular es la curva $y = x^5e^x - x^4e^x + 2x^4$.

37 Encontrar la solución de la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2 senx$.

Solución

Es una ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=xsenx \qquad \rightarrow p\left(x\right)=-\frac{1}{x} \qquad q\left(x\right)=xsenx$$

Consideramos el factor integrante

$$\mu\left(x\right)=e^{-\int p(x)dx}=e^{-\int \frac{1}{x}dx}=e^{-\log x}=\frac{1}{x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante, se tiene

$$\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=senx \rightarrow \left(\frac{1}{x}y\right)'=senx$$

Integrando

$$\frac{1}{x}y=-\cos x+C \Rightarrow \boxed{y=-x\cos x+Cx}$$

E_01 Dado el PVI,

$$x\frac{dy}{dx}-y=x^2\cos\left(2x\right),\ y\left(x_o\right)=1$$

a) ¿Qué significa que exista una única solución de este problema? ¿Qué debería verificarse para asegurarlo?

b) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2\cos\left(2x\right)$

Solución

La ecuación es lineal. Para encontrar la solución general buscamos la solución general de la ecuación homogénea asociada y la solución particular.

- Solución general de la homogénea: $x\dfrac{dy}{dx}-y=0$

$$x\frac{dy}{dx}-y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad \log\left|y\right|=\log\left|x\right|+C \rightarrow \left|y\right|=\left|x\right|e^C \rightarrow \ y=x\,C \ \ C\in\mathbb{R}$$

- Solución particular de la completa $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2\cos\left(2x\right)$

Consideramos $y_p=x\,C\left(x\right)$ $\quad y_p'=C\left(x\right)+x\,C'\left(x\right)$. Se debe cumplir $xy_p'-y_p=x^2\cos 2x$

Por lo tanto, se cumple

$$x\left(C\left(x\right)+x\,C'\left(x\right)\right)-xC\left(x\right)=x^2\cos 2x$$

$$x^2C'\left(x\right)=x^2\cos 2x \quad\rightarrow\quad C'\left(x\right)=\cos 2x \quad\rightarrow\quad C\left(x\right)=\frac{\text{sen}2x}{2}$$

La solución particular es $y_p=\dfrac{x\,sen\left(2x\right)}{2}$

La solución general de la ecuación es: $y_G=Cx+\dfrac{x\,sen\left(2x\right)}{2}$.

APLICACIONES

38 Un isótopo radiactivo plutonio 241 se desintegra de acuerdo a la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt}=-0.0525Q$$

donde $Q\left(t\right)$ es la cantidad de material en el instante t medido en miligramos y t en años.

a) Determinar la vida media del plutonio 241, es decir, el tiempo necesario para que la cantidad de la sustancia se reduzca a la mitad.

b) Si actualmente tenemos 50 mg de plutonio, ¿cuánto quedará en 10 años?

Solución

La ecuación diferencial es de variables separadas

$$\frac{dQ}{dt}=-0.0525Q$$

$$\frac{dQ}{Q}=-0.0525dt\Rightarrow\log Q=-0.0525\,t+C\Rightarrow Q\left(t\right)=e^{-0.0525\,t}C$$

Considerando que $Q\left(0\right)=Q_o$ el valor de la constante será

$$Q_o=e^{-0.0525\cdot 0}C\Rightarrow C=Q_o$$

Por lo tanto, $Q\left(t\right)=Q_o\,e^{-0.0525\,t}$

Para obtener la vida media del plutonio, suponiendo se deberá calcular el valor de t de forma que

$$Q\left(t\right)=\frac{Q_o}{2}\quad\Rightarrow\quad Q_o\,e^{-0.0525\,t}=\frac{Q_o}{2}\quad\Rightarrow\quad e^{-0.0525\,t}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad -0,0525\,t=-\log 2\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\log 2}{0,0525}\approx 13,2028\ años$$

Si actualmente tenemos 50 mg. de plutonio, en 10 años se tendrá

$$Q\left(10\right)=50\,e^{-0,0525\cdot 10}\approx 29,5778\ mg.$$

Código Matlab

```
syms C Q(x)
sol(C,t)=dsolve(diff(Q,x)==-0.0525*Q,Q(0)==C)
tiempo=solve(sol(C,x)-C/2)
sol50(t)=sol(50,t)
sol50(10)
```

39 Sabemos que un material radiactivo se desintegra proporcionalmente a la cantidad existente en cada momento. En una prueba realizada con 60 mg de este material se observó que después de 3 horas quedaba un 80% de esta masa. Hallar

a) La función que expresa la cantidad de masa restante cuando ha transcurrido un tiempo t
b) ¿Qué cantidad queda cuanto t=5 horas?
c) ¿En qué instante la cantidad de material es de ¼ de la cantidad inicial?

Solución

Se denota por Q la cantidad de material en miligramos de la sustancia en el instante t. La ecuación diferencial que describe la desintegración es

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \quad , \quad Q\left(0\right) = 60$$

Resolviendo la ecuación diferencial quedará:

$$\log Q = -kt + A \;\Rightarrow\; Q\left(t\right) = Ce^{-kt}$$

Para obtener la constante C se considera la condición inicial: $60 = Ce^{-k\cdot 0}$

Como

$$Q\left(3\right) = 60e^{-3k} \Rightarrow 48 = 60e^{-3k} \Rightarrow -3k = \log\left(\frac{48}{60}\right) \Rightarrow k = \frac{-1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)$$

1. La solución entonces es $Q\left(t\right) = 60e^{\frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)t}$.

2. Cuando t=5 se tendrá $Q\left(5\right) = 60e^{\frac{5}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)} \approx 41.36\ mg$

3. El valor de t pedido será el que verifique

$$15 = 60e^{\frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)t} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)t \Rightarrow t = \frac{-3\log\left(4\right)}{\log\left(4\right) - \log\left(5\right)} \approx 18.6377\, horas$$

40 Un termómetro que está a una temperatura de $18^{o}C$ se coloca en una sala que se encuentra a una temperatura de $68^{o}C$. Si después de 5 minutos la temperatura del termómetro es de $28^{o}C$, encontrar

a) Tiempo que tardará en tener la temperatura de $37^{o}C$

b) La temperatura después de 20 minutos

Solución

Considerando $T(t)$ la temperatura del termómetro en el instante t medido en minutos, la ecuación diferencial que modeliza este problema es la siguiente

$$\frac{dT}{dt} = k(T-68) \qquad T(0) = 18$$

Donde k será positiva y el termómetro aumentará la temperatura. Resolviendo la ecuación se tiene

$$\frac{dT}{T-68} = k \quad \Rightarrow \log|T-68| = kt + C \Rightarrow |T-68| = e^{kt}C \ (C>0)$$

$$T-68 = e^{kt}C \ (C \in \mathbb{R}) \Rightarrow T(t) = 68 + e^{kt}C$$

Teniendo en cuenta que $T(0) = 18 \ \Rightarrow 18 = 68 + C \Rightarrow C = -50$. Es decir $T(t) = 68 - 50e^{kt}$. Para obtener la constante k que depende del medio utilizaremos que $T(5) = 28$, por lo tanto

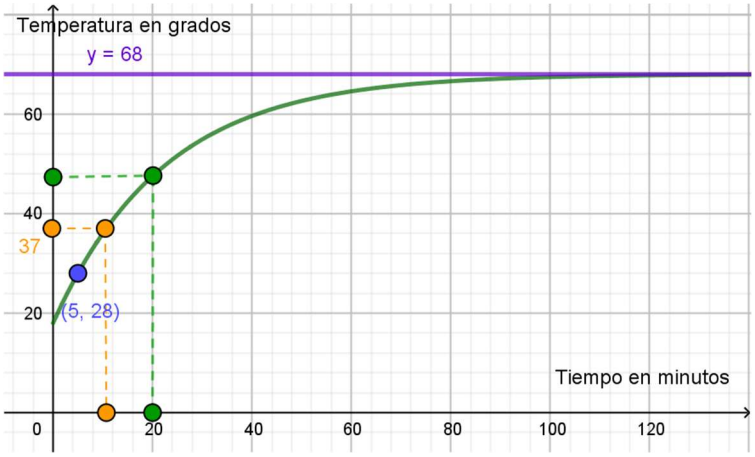
$$28 = 68 - 50e^{kt} \Rightarrow \ 50e^{5k} = 40 \Rightarrow k = \frac{1}{5}\log\left(\frac{40}{50}\right) \approx -0.0446$$

Luego

$$T(t) = 68 - 50e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{40}{50}\right)t}$$

Para obtener el tiempo que tardará en alcanzar una temperatura de 37º

$$37 = 68 - 50e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{40}{50}\right)t} \Rightarrow 50e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{40}{50}\right)t} = 31 \Rightarrow \frac{1}{5}\log\left(\frac{40}{50}\right)t = \log\left(\frac{31}{50}\right) \ \Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{31}{50}\right)}{\frac{1}{5}\log\left(\frac{40}{50}\right)} \approx 10.71 \text{ min}.$$



La temperatura pasados 20 minutos es

$$T\left(20\right)=68-50e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{40}{50}\right)\cdot 20}\approx 47,52^{o}$$

Código Matlab

```
syms T(t) K
solu(K,t)=dsolve(diff(T,t)==K*(68-T),T(0)==18)
%Cálculo de la constante
K1=solve(solu(K,5)-28)
T(t)=solu(t,K1)
hold on
fplot(T(t),[0,100])
%Temperatura al cabo de 20 minutos
temperatura=T(20)
plot(20,temperatura,'or')
%Calculo del tiemp0
tiempo=solve(T(t)-37);
double(tiempo)
plot(tiempo,37,'*r')
T(20)
hold off
```

41 Determinar la familia de curvas ortogonal a la familia $x^2-3y^2=C$.

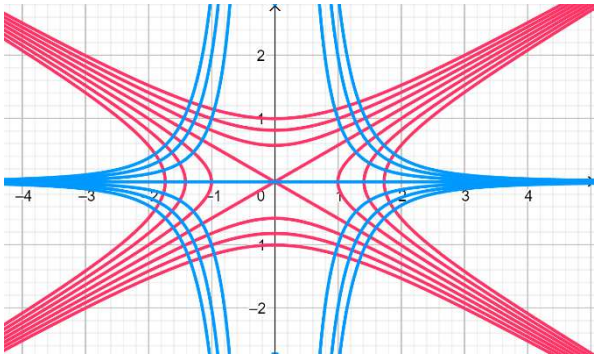
Solución

La ecuación diferencial que tiene por solución la familia dada es $2x-6yy'=0$, es decir,

$$y'=\frac{x}{3y}$$

Encontramos la ecuación diferencial de la familia ortogonal como solución general de la ecuación diferencial: $y'=-\dfrac{3y}{x}$. Resolviendo

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}dx \quad \Rightarrow \qquad \log|y| = \log|x|^{-3} + C \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{C}{x^3}$$



42 Las curvas equipotenciales de un determinado campo electrostáticio se pueden considerar elipses $x^2 - 2cx + 2y^2 = 0$. Calcular las líneas de fuerza, es decir, las trayectorias ortogonales a las curvas equipotenciales.

Solución

Hay que calcular la familia ortogonal a la dada. Derivando implícitamente $2x - 2C + 4yy' = 0 \quad \Rightarrow y' = \dfrac{2C - 2x}{4y} = \dfrac{2y^2 - x^2}{4yx}$ donde se ha sustituido $2C = \dfrac{2y^2 + x^2}{x}$ al despejar en la expresión $x^2 - 2cx + 2y^2 = 0$.

La familia de curvas ortogonales es la solución de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{4yx}{2y^2 - x^2} = \frac{4yx}{x^2 - 2y^2}$$

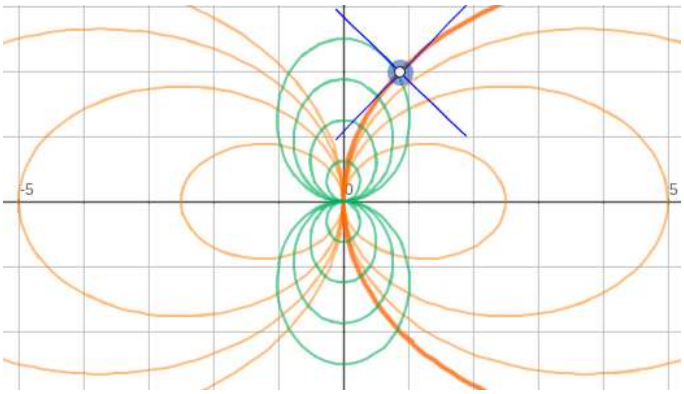
que es una ecuación homogenea. Para resolverla se hace el cambio

$$z = \frac{y}{x} \quad \rightarrow y = zx \qquad y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{4zx^2}{x^2 - 2z^2x^2} = \frac{4z}{1 - 2z^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1 - 2z^2}{3z + 2z^3}dz = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3}\log z - \frac{2}{3}\log\left(3 + 2z^2\right) = \log x + C$$

Deshaciendo el cambio, la familia de curvas será: $C = \dfrac{\left(3x^2 + 2y^2\right)^2}{y}$



43 Dada la familia F de curvas $4y + a\,x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$, se pide:

a) Obtener a mano la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas dada.

b) Obtener con Matlab la familia de trayectorias ortogonales a la familia F.

c) Representar con Matlab la curva de la familia F que pasa por el punto $(a,0)$ junto con la curva ortogonal en dicho punto.

Solución

La ecuación diferencial se obtiene primero derivando implícitamente:

$$4y' + 2a\,x + C2e^{2y}y' = 0$$

y posteriormente eliminando la constante, teniendo en cuenta que $Ce^{2y} = -4y - a\,x^2 - 1$

$$4y' + 2a\,x + \left(-4y - a\,x^2 - 1\right)2y' = 0$$

Despejando, la ecuación diferencial cuya solución es la familia dada es

$$y' = \frac{-ax}{-4y - ax^2 + 3}$$

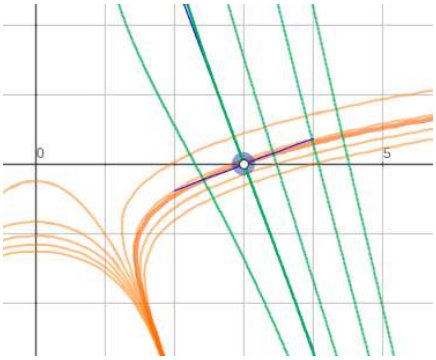
La familia ortogonal buscada es la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-4y - ax^2 + 3}{ax}$$

Código Matlab

```
a=3 %Por ejemplo
syms y(x) C1
sola(C1,x)=dsolve(diff(y,x)==(-4*y-a*x^2+3)/(a*x))
valorC=solve(sola(C1,a))
hold on
fplot(sola(valorC,x))
%Representación de la curva F
```

```
valorC=solve(4*0+a*a^2+1+C1*exp(2*0))
syms z
funcion(x,z)= 4*z+a*x^2+1+valorC*exp(2*z)
fplot(funcion(x,z))
plot(a,0,'o')
axis equal
hold off
```



Nota: Este código es general para cualquier valor de a, se puede simplificar sustituyendo desde el principio el valor de a por el que correspondiera.

44 Calcula las líneas de flujo del campo $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{y^3}{3},xy^2\right)$.

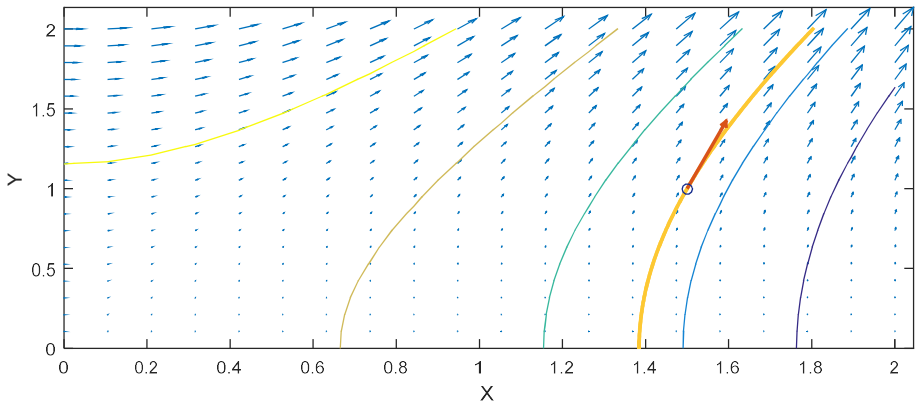
Solución

Llamando $M(x,y)=\frac{y^3}{3}$ $\quad M(x,y)=xy^2$, se cumplirá que las líneas de flujo son curvas y(x) que tienen como vector tangente el campo, es decir,

$$y'=\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{xy^2}{y^3/3}=\frac{3x}{y}$$

Resolviendo la EDO que se obtiene será

$$ydy=3xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2}-\frac{3x^2}{2}=C \Rightarrow \boxed{y^2-3x^2=C}$$



45 Un tanque de 10L de capacidad que está inicialmente lleno de agua pura, recibe una disolución salada con una concentración de sal de 0,3kg/L a una velocidad de 2L/min. La solución dentro del tanque se mantiene agitada y fluye hacia el exterior a una velocidad de 2L/min.

a) Determinar el tiempo necesario para que la concentración de sal en el tanque sea de 0,2kg/L.

b) ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que se puede acumular en el tanque?

Solución

a) Sea t la variable independiente (tiempo en minutos).

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t.

La variación de la cantidad de sal en el tanque en el intervalo $\left(t, t+\Delta t\right)$ es:

$$\Delta y(t) = sal\ \ entrante - sal\ \ saliente$$

donde,

$$\begin{cases} sal\ \ entrante = 0,3\dfrac{kg}{L}\cdot 2\dfrac{L}{\min}\cdot \Delta t\min = 0,6\Delta t\ \ kg \\ sal\ \ saliente = \dfrac{y(t)}{10}\dfrac{kg}{L}\cdot 2\dfrac{L}{\min}\cdot \Delta t\min = 0,2y(t)\Delta t\ \ \ kg \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\Delta y(t) = 0,6\Delta t - 0,2y(t)\Delta t$$

Dividiendo entre Δt y tomando límites cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene la ecuación diferencial que modela el proceso, es decir que expresa la variación de la cantidad de sal en el tanque en cada instante t (tasa de acumulación).

Puesto que en el instante inicial no hay sal, el problema de valor inicial es:

$$\begin{cases} y'(t) = 0,6 - 0,2y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esta ecuación se puede resolver por separación de variables:

$$\frac{dy}{dt} = 0,6 - 0,2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{0,6-0,2y} = dt$$

o como lineal:

$$\mu(t) = e^{0,2t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-0,2t}\left(\int 0,6e^{0,2t}dt\right) = Ce^{-0,2t} + 3$$

Imponiendo la condición inicial se obtiene $C = -3$, por tanto $y(t) = 3\left(1 - e^{-0,2t}\right)$ kg.

La concentración de $0,5\dfrac{kg}{L}$, implica una cantidad de sal en el tanque de 2 kg, por lo tanto resolviendo $2 = 3\left(1 - e^{-0,2t}\right)$, obtenemos $t = 5{,}5$min.

c) Cuando $t \to \infty$, $y(t) \to 3$ kg, que es la cantidad máxima de sal que se puede acumular en el tanque.

46 En una población de 10000 habitantes, cincuenta de ellos tienen una enfermedad contagiosa. La velocidad a la que se propaga la enfermedad es proporcional al producto de personas contagiadas por las no contagiadas todavía, con una constante de proporcionalidad 0,2. Si al cabo de tres días, se observa que son 250 las personas contagiadas, calcular el número de enfermos pasados 12 días (Modelo de Verhulst).

Nota: En este caso se está considerando un modelo simple de dinámica de poblaciones, existen otros modelos en el que se tienen en cuenta la existencia de circunstancias que limitan el crecimiento de la población.

Solución

```
syms P(t) k
sol(t,k)=dsolve(diff(P,t)==k*P*(10000-P),P(0)==50)
valork=solve(sol(3,k)-250)
P1(t)=sol(t,valork)
double(P1(12))
```

47 Una bola de naftalina pierde masa por evaporación con una rapidez proporcional a su área superficial. Si la mitad de la masa se pierde en 100 días,

a. ¿cuánto tiempo se necesita para que el radio disminuya a la mitad de su valor inicial?,

b. ¿cuánto tiempo pasará hasta que la bola desaparezca por completo?

Indicación: Área de la superficie de la esfera es $4\pi R^2$, su volumen es $\frac{4}{3}\pi R^3$. Suponer la densidad constante.

Solución

a) Plantear la ecuación diferencial teniendo en cuenta que la masa de la bola de la naftalina, al ser una esfera, es $m = \delta V = \delta \frac{4}{3}\pi R^3$ siendo δ la densidad.

b) Resolver la ecuación diferencial.

c) Calcular el radio en el instante t=100 teniendo en cuenta que la mitad de la masa se pierde en 100 días.

d) A partir del dato anterior calcular el valor de la constante de proporcionalidad de la ecuación diferencial

e) Calcular el tiempo para que el radio se reduzca a la mitad

f) Calcular el tiempo para que la bola desaparezca

```
syms r0 r(t) K d
sol(t,K,d,r0)=dsolve(diff(r,t)==-K/d,r(0)==r0)
valorK=solve(sol(100,K,d,r0)==r0/2^(1/3),K)
r(t,d,r0)= sol(t,valorK,d,r0)
tiempoMitad=double(solve(r(t,d,r0)-r0/2,t))
```

```
tiempoDes=double(solve(r(t,d,r0)))
```

a) 242.366 días b) 484.732 días.

48 Calcular la familia ortogonal de curvas a la siguiente $\cos y = Ce^{-x}$ siendo $C \in \mathbb{R}$

Solución

En primer lugar obtenemos la edo asociada a la familia de curvas

$$y' sen\, y = -Ce^{-x}$$

Teniendo en cuenta que $\cos y = Ce^{-x}$ la edo es entonces

$$-y' sen\, y = -\cos y \Rightarrow y' = \frac{\cos y}{seny}$$

La edo de la familia ortogonal es $y' = -\dfrac{sen\left(y\right)}{\cos\left(y\right)}$

$$\frac{\cos y}{seny} dy = -x \Rightarrow \log\left|seny\right| = -x + C \Rightarrow \boxed{sen\left(y\right) = Ce^{-x}} \quad C \in \mathbb{R}$$

E_01 Calcular con Matlab la solución de la ecuación diferencial $\left(2 + x + 2y\right)dx + dy = 0$ que pasa por el punto (1,1). Encuentra una curva ortogonal a la obtenida como solución que pase por el mismo punto

Solución

Para resolver el problema con Matlab, basta escribir el siguiente código

```
clear all
syms y(x)
ecuacion=diff(y)==-2-x-2*y;
sol(x)=dsolve(ecuacion, y(1)==1)
%Solución (9*exp(-2*x)*exp(2))/4 - x/2 - ¾
```

Para calcular una curva ortogonal a la dada habrá que resolver el problema siguiente,

$$y' = \frac{1}{2 + x + 2y} \qquad y\left(1\right) = 1$$

A la hora de corregir esta prueba, se ha considerado la máxima puntuación si se escribía el código Matlab o se explicaba cómo obtener la curva ortogonal aunque no se diera el restultado ya que Matlab no da ninguna solución cuando se escribe el siguiente código,

```
syms y(x)
ecuac=diff(y)==1/(2+x+2*y);
sol(x)=dsolve(ecuac, y(1)==1)
```

No obstante, se puede obtener la solución de forma analítica. Para ello se debe hacer el cambio de variable $z = 1 + x + 2y$, siendo $z' = 1 + 2y' \Rightarrow y' = \dfrac{z'-1}{2}$. En consecuencia, la ecuación diferencial a resolver será de variables separables

$$\frac{z'-1}{2} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{2}{z} + 1 \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{2+z}{z}$$

$$\frac{z}{2+z}dz = dx \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{2+z}\right)dz = dx \Rightarrow z - 2\log\left(z+2\right) = x + C$$

Deshaciendo el cambio

$$\left(2 + x + 2y\right) - 2\log\left(4 + x + 2y\right) = x + C$$

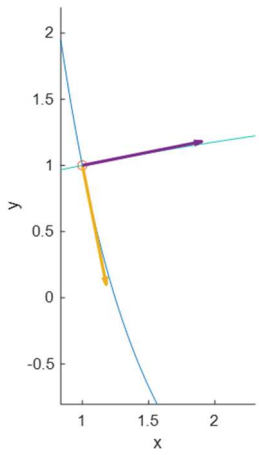
Si se quiere que la solución pase por el (1,1) , se cumplirá

$$5 - 2\log 7 = 1 + C \Rightarrow C = 4 - 2\log 7$$

En consecuencia, la curva ortogonal será entonces:

$$\left(2 + x + 2y\right) - 2\log\left(4 + x + 2y\right) = x + 4 - 2\log 7$$

La gráfica muestra en la misma figura tanto la curva solución de la ecuación diferencial dada como su curva ortogonal en el punto (1,1).



E_02 Una familia de curvas en cualquier punto del plano $\left(x, y\right)$ tiene como pendiente $f\left(x\right) = 4 - 2x$. Determinar la curva de esta familia que pasa por el punto $\left(0, 0\right)$ y calcular también la curva ortogonal que pasa por dicho punto.

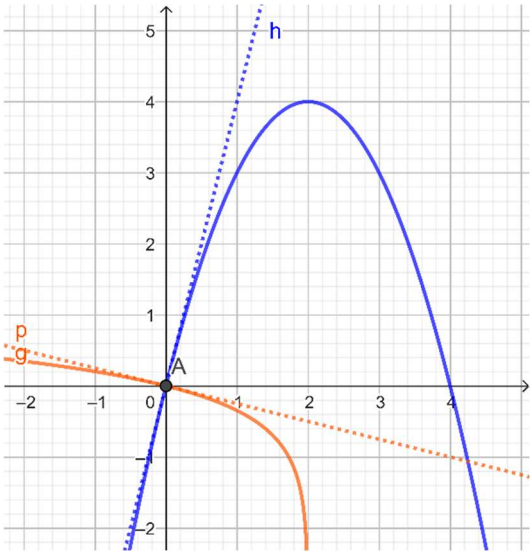
Solución

La familia de curvas verifica $y' = 4 - 2x$, integrando $y = 4x - x^2 + C$. De toda la familia de curvas, la que pasa por el (0,0) es la curva $y = 4x - x^2$.

La curva ortogonal en dicho punto deberá verificar $y' = \dfrac{-1}{4-2x}$. Integrando

$$y = \frac{1}{2}\log\left(4-2x\right) + C$$

Si debe pasar por el (0,0), la curva será $0 = \dfrac{1}{2}\log\left(4\right) + C \quad \Rightarrow \; C = -\log 2$. La curva ortogonal es $y = \dfrac{1}{2}\log\left(4-2x\right) - \log 2$



Puedes ver más ejercicios resueltos sobre ecuaciones diferenciales de primer orden en la página de Giematic UC
https://www.giematic.unican.es/index.php/edos-primer-orden/material-interactivo