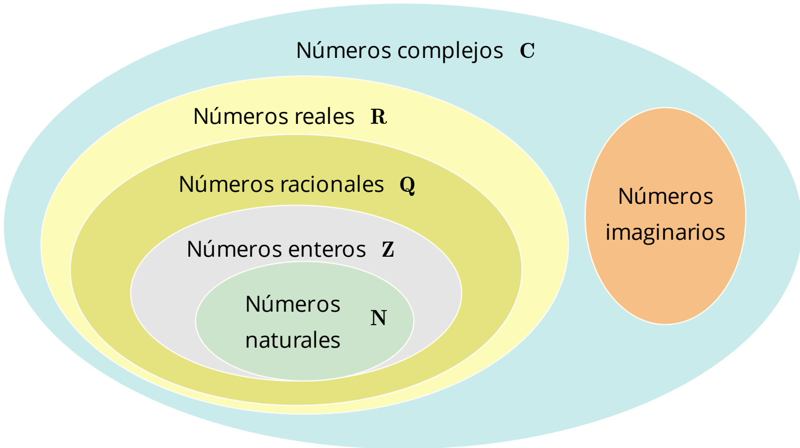
NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

NÚMEROS REALES

1 Sistemas numéricos

Los diferentes conjuntos de números surgen por necesidades prácticas de dar sentido a algunas operaciones algebraicas.



El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la suma y el producto tiene estructura de cuerpo.

En $\mathbb{R}$ está definida una relación de orden $\leq$

- Reflexiva: $a \leq a$
- Antisimétrica: Si $a \leq b \quad y \quad b \leq a$ entonces $a = b$
- Transitiva: Si $a \leq b \quad y \quad b \leq c$ entonces $a \leq c$

Esta relación de orden es total y compatible con la suma y el producto:

- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene $a \leq b \quad ó \quad b \leq a$
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \geq 0$ si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$

En el conjunto de los números reales todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo (axioma del supremo).

2 Intervalos

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$

Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$

Intervalo semiabiertos o semicerrados: $\left(a,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x \leq b\right\}$

$$\left[a,b\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x < b\right\}$$

Intervalos no acotados

Sea $a \in \mathbb{R}$ se definen los siguientes conjuntos:

$$\left(a,\infty\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x > a\right\}$$

$$\left[a,\infty\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq a\right\}$$

$$\left(-\infty,a\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x < a\right\}$$

$$\left(-\infty,a\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq a\right\}$$

3 Valor absoluto. Definición y propiedades

Si $a > 0$, entonces

$\lvert x\rvert = a$	significa que	$x = a$	o	$x = -a$
$\lvert x\rvert < a$	significa que	$-a < x < a$		
$\lvert x\rvert > a$	significa que	$a < x$	o	$x < -a$

Propiedades

$$\left|-a\right| = \left|a\right| \qquad \left|a\,b\right| = \left|a\right|\left|b\right| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{\left|a\right|}{\left|b\right|}$$

4 Fórmulas de distancia y punto medio

Distancia entre $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$: $d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$

Punto medio de $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

NÚMEROS COMPLEJOS

5 Definición

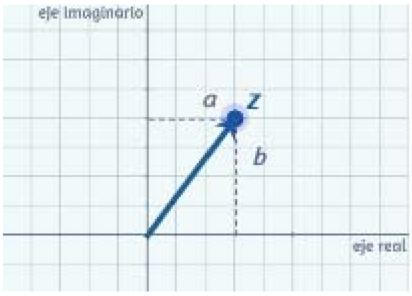
El conjunto $\mathbb{R}^2 = \left\{\left(a,b\right) / \; a,b \in \mathbb{R}\right\}$ con las operaciones suma y producto siguientes

$$\left(a,b\right)+\left(c,d\right)=\left(a+c,b+d\right)$$

$$\left(a,b\right)*\left(c,d\right)=\left(ac-bd,ad+bc\right)$$

se llamará conjunto de números complejos y lo denotaremos por $\mathbb{C}$, $\left(\mathbb{R}^2,+,*\right)=\mathbb{C}$

Cada número complejo $z=\left(a,b\right)$ puede identificarse con el punto P de coordenadas $\left(a,b\right)$, que recibe el nombre de afijo de z. Al número complejo $\left(0,1\right)$ le llamaremos *unidad imaginaria* y representaremos por i. Además, el número real a se identifica con el número complejo $\left(a,0\right)$, $a\equiv\left(a,0\right)$.



Observad que se cumple $\quad i^2\equiv\left(0,1\right)*\left(0,1\right)=\left(-1,0\right)\equiv-1$

Teniendo en cuenta que: $\left(a,b\right)\equiv\left(a,0\right)+\left(b,0\right)*\left(0,1\right)$, El complejo $z=\left(a,b\right)$ se representa en forma binómica, como $z=a+bi$.

6 Definiciones

Para el número complejo $z=a+bi$

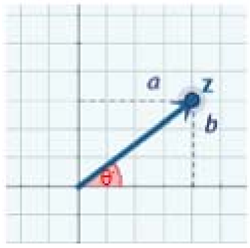
- La parte real de z es a
- La parte imaginaria de z es b
- El conjugado es $\bar{z}=a-bi$
- El módulo es $\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Interpretación geométrica del módulo (Distancia).- Sean los complejos $z=x+yi$ *,* $z_0=x_0+y_0i$ *, el valor de* $\left|z-z_0\right|$ *representa la distancia entre los afijos de los complejos* z *y* z_0 *.*

De la interpretación geométrica del módulo se deduce que la igualdad $\left|z-z_0\right|=r$ la verifican todos los puntos (x,y) del plano, cuya distancia al punto (x_0,y_0) es igual a r. Elevando la igualdad anterior al cuadrado se obtiene la ecuación de la circunferencia de centro (x_0,y_0) y radio r.

$$|z-z_0|^2=\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

- El argumento de z es θ siendo $\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}$, $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{b}{|z|}$. Se denota $\arg(z)$ y se dice principal si $-\pi<\theta\le\pi$.



Si z es un número complejo y φ su argumento se cumple:

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

Llamaremos valor principal del argumento al comprendido entre $-\pi$ y π: $-\pi<\arg z\le\pi$.

Cualquier ángulo φ verificando $\varphi=\arg z+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$, también es argumento de z.

Formas de expressar un número complejo: Si $z=a+bi$. $r=|z|$ $\theta=\arg(z)$

Forma trigonométrica	$z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$
Forma polar	$z=r_\theta$
Forma exponencial	$z=re^{i\theta}$

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$ *(Fórmula de Euler)*

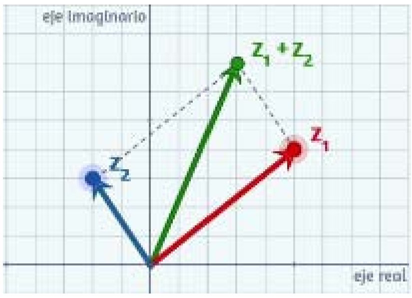
7 Operaciones

Si $z=a+bi=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=re^{i\theta}$

$w=c+di=s(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)=se^{i\varphi}$

- Suma: $z+w=(a+c)+(b+d)i$

$$z + w = \left(r\cos\theta + s\cos\varphi\right) + \left(r\,\mathrm{sen}\,\theta + s\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)i$$



- Producto $\quad z\cdot w = ac - bd + \left(ad + bc\right)i$

$$z\cdot w = rs\left(\cos\left(\theta+\varphi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\theta+\varphi\right)\right)$$

$$z\cdot w = rs\; e^{i\left(\theta+\varphi\right)}$$

- Cociente: $\quad \dfrac{z}{w} = \dfrac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \dfrac{\left(a+bi\right)\left(c-di\right)}{c^2+d^2}$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\left(\cos\left(\theta-\varphi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\theta-\varphi\right)\right)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\; e^{i\left(\theta-\varphi\right)}$$

- Potencias de exponente natural

Teorema de Moivre: Si n es un número natural,

$$z^n = \left[r\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right]^n = r^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\,\mathrm{sen}\left(n\theta\right)\right)$$

$$z^{1/n} = \left[r\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

donde k=0,1, ...(n-1)

- Raices enésimas

$$z^{1/n} = \left[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]^{1/n} =$$

$$= r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0,1,2\ldots(n-1)$$

8 Funciones trigonométricas complejas

Si $a\in\mathbb{R}$ entonces se tiene $\quad e^{ia} = \cos a + i\,\mathrm{sen}\,a$

$$e^{-ia} = \cos a - i\,\mathrm{sen}\,a$$

Por lo tanto,

$$e^{ia} + e^{-ia} = 2\cos a$$

$$e^{ia} - e^{-ia} = i2\,\mathrm{sen}\,a$$

Extendiendo estas fórmulas al campo complejo definimos el *seno* y el *coseno complejos*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \mathrm{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Ejercicios propuestos

1 Escribir en las formas binómica, polar y exponencial los siguientes números complejos:

a) $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,sen\,\frac{\pi}{3}\right)^8$

b) $z = \frac{\left(5_{\pi/4}\right)^2}{(4i)^3 \cdot 2_{5\pi/6}}$ c) $\frac{1+4i}{1-4i} \cdot \mathrm{Re}\,\overline{(3-i)}$

d) $z = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)^{14} \cdot (1-i)^6}{\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^3}$

Solución: a) $-4 + 4\sqrt{3}\cdot i = 8_{\frac{2\pi}{3}} = 8\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$

b) $\frac{25}{256}\cdot\left(\sqrt{3}+i\right) = \left(\frac{25}{128}\right)_{\frac{\pi}{6}} = \frac{25}{128}\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

c) $\frac{3}{17}\cdot(-15+8i) = 3_{arc\,tg\left(\frac{-8}{15}\right)} = 3\cdot e^{arc\,tg\left(\frac{-8}{15}\right)i}$

d) $-1 = 1_\pi = e^{\pi i}$

2 a) Realizar las siguientes operaciones: $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente

(a.1) $z_1 = \frac{1}{i} \quad z_2 = \frac{1-i}{1-3i}$

(a.2) $z_1 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^3 \quad z_2 = \frac{2}{1-3i}$

(B) Representar en el plano complejo todos los valores posibles de i^m, para $m \in \mathbb{Z}$.
Ejemplos: i^{-425}, i^{28}, i^{189}, i^{275}

Solución: (a.1) $z_1 = -i \qquad z_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

(a.2) $z_1 = -8 \qquad z_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

(b) $i^{-425} = i^{-1} = -i$; $i^{28} = 1$; $i^{189} = i$; $i^{275} = i^3 = -i$

3 Escribir en las formas binómica, polar y exponencial los siguientes números complejos:

a) $z = 8\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sen\,\frac{\pi}{3}\right)^8$

b) $z = \frac{\left(5_{\pi/4}\right)^2}{(4i)^3 \cdot 2_{5\pi/6}}$

c) $\frac{1+4i}{1-4i} \cdot \mathrm{Re}\,\overline{(3-i)}$

d) $z = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)^{14} \cdot (1-i)^6}{\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^3}$

Solución:

a) $-4 + 4\sqrt{3}\cdot i = 8_{\frac{2\pi}{3}} = 8\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$

b) $\frac{25}{256}\cdot\left(\sqrt{3}+i\right) = \left(\frac{25}{128}\right)_{\frac{\pi}{6}} = \frac{25}{128}\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

c) $\frac{3}{17}\cdot(-15+8i) = 3_{arc\,tg\left(\frac{-8}{15}\right)} = 3\cdot e^{arc\,tg\left(\frac{-8}{15}\right)i}$

d) $-1 = 1_\pi = e^{\pi i}$

4 Sean z y w dos números complejos que satisfacen las siguientes condiciones

$|z| = 2$ y $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{4}$

siendo una de las raíces novenas de w el número complejo $\frac{1}{2}\left(i - \sqrt{3}\right)$. Se pide calcular

z, w, e^z, $\left|e^w\right|$.

Solución: $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $w = -i$,
$e^{z} = e^{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\sqrt{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}\right)\right]$, $\left|e^{w}\right| = 1$

Ejercicios resueltos

1 Halla el valor de $z = \dfrac{3-2i}{2+i}$, $w = \dfrac{27+8i}{5+6i}$

Solución

$$z = \frac{3-2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{\left(3-2i\right)\left(2-i\right)}{\left(2+i\right)\left(2-i\right)} = \frac{(6-2)+(-3-4)i}{2^2+1^2} = \frac{4-7i}{4+1}$$

$$z = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

$$w = \frac{27+8i}{5+6i} = \frac{27+8i}{5+6i}\cdot\frac{5-6i}{5-6i} = \frac{(135+48)+(-162+40)i}{5^2+6^2} = \frac{183-122i}{25+36} = \frac{183}{61} - \frac{122}{61}i$$

$$w = 3-2i$$

2 Calcular el valor de a y b para que $\dfrac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real y de módulo unidad

Solución

Operando

$$z = \frac{(3b-2ai)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{12b-8ai+9bi+6a}{16+9} = \frac{12b+6a}{25} + i\,\frac{9b-8a}{25}$$

- Si se quiere que sea real

$$\frac{9b-8a}{25} = 0 \quad\Rightarrow\quad 9b-8a=0 \quad\Rightarrow\quad b = \frac{8a}{9}$$

- Si además es de módulo uno

$$\frac{12b+6a}{25} = 1 \quad\Rightarrow\quad 12b+6a = 25 \quad\Rightarrow\quad \frac{96a}{9}+6a = 25 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{2}{3}$$

Luego, los valores pedidos son

$$a = \frac{2}{3} \qquad b = \frac{4}{3}$$

3 Calcular $z = \sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$ y las raíces cúbicas del número -27 en forma binómica

Solución

a) Calculando su módulo y argumento

$$r = \left|z\right| = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\phi = \arg\left(z\right) = arctg\,\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$$

se tiene que sus raíces sextas son:

$$z_k = \sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi/3+2k\pi}{6}} \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

b) $z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27e^{(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}} = 3e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 3e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$
$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 3e^{\frac{\pi}{2}i} = 3i$$
$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 3e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

4 Escribir en forma exponencial los siguientes números complejos:

$$z = \frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{27}}{\overline{i\,e^{2\pi i}}} \qquad\qquad w = \sum_{n=2}^{235} i^n$$

Solución

$$z = \frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{27}}{\overline{i\,e^{2\pi i}}} = 2^{27}e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{ya que}$$

$$\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{27} = \left(2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{27} = 2^{27}e^{-\frac{2*27\pi}{3}i} = 2^{27}e^{-18\pi i} = 2^{27}$$
$$e^{2\pi i} = 1$$
$$\overline{ie^{2\pi i}} = \overline{i} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

Teniendo en cuenta que las potencias de i son -1, -i, 1, i agrupando las sumas de cuatro en cuatro términos se obtendrá que la suma de cada grupo de cuatro sumandos es 0. Como hay 234 sumandos, se pueden hacer 58 grupos de 4 y sobrarán los dos últimos sumandos:

$$w = \underbrace{\sum_{n=2}^{235} i^n}_{\substack{234\ sumandos \\ 234=4*58+2}} = \underbrace{\left(i^2+i^3+i^4+i^5\right)}_{=0} + \underbrace{\left(i^6+i^7+i^8+i^9\right)}_{=0} + \ldots + \underbrace{\left(i^{230}+i^{231}+i^{232}+i^{233}\right)}_{=0} + i^{234} + i^{235} =$$

$$= i^2 + i^3 = -1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

5 Escribir en forma exponencial los siguientes números complejos:

$$z=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{21}}{\overline{i^{2014}}\ \ e^{2\pi i}} \qquad\qquad w=\frac{2_{\pi}\ \left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}}$$

Solución

$$z=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{21}}{\overline{i^{2014}}\ \ e^{2\pi i}}=\frac{2^{21}}{-1}=-2^{21}=2^{21}e^{\pi\, i}$$ ya que

$$\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{21}=\left[2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right]^{21}=2^{27}e^{-\frac{2*21\pi}{3}i}=2^{21}e^{-14\pi i}=2^{21}$$

$$i^{2014}=i^{2}=-1\Rightarrow\ \overline{i^{2014}}=-1$$

$$e^{2\pi i}=1$$

$$w=\frac{2_{\pi}\ \left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}}=\frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$ ya que

$$\left.\begin{array}{l} 2_{\pi}=2e^{\pi i} \\ 2+2i=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \\ e^{3+\frac{\pi}{3}i}=e^{3}e^{\frac{\pi}{3}i} \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2_{\pi}\left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}}=\frac{2e^{\pi i}\ \ 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{e^{3}e^{\frac{\pi}{3}i}}=\frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i}=\frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

6 Resolver la ecuación: $z^{4}=i$ escribiendo los números complejos solución en forma exponencial con argumento comprendido entre $-\pi$ y π.

Solución

Se trata de calcular las raíces cuartes de i

$$z=\sqrt[4]{i}=\sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{i\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{4}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)}\qquad k=0,1,2,3$$

Escribiendo las 4 raíces con su argumento principal se tendrá:

$$z_{o}=e^{\frac{\pi}{8}i}\qquad\qquad z_{1}=e^{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)i}=e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

$$z_{3}=e^{\left(\frac{9\pi}{8}-2\pi\right)i}=e^{-\frac{7\pi}{8}i}\qquad z_{4}=e^{i\left(\frac{13\pi}{8}-2\pi\right)}=e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$

7 Determinar el lugar geométrico de los números complejos z que verifican $\left|z-2\right| = \left|z-3\right|$

Solución

Forma 1. Calculamos los números complejos $z = x + iy$ que cumplan

$$\left|x+iy-2\right| = \left|x+iy-3\right| \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + y^2 = \left(x-3\right)^2 + y^2$$

Operando

$$\left|x+iy-2\right| = \left|x+iy-3\right| \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 = \left(x-3\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x = 5/2$$

Se trata de los números complejos cuya parte real es 5/2.

Forma 2. Si tenemos en cuenta que la expresión $d\left(z,w\right) = \left|z-w\right|$, se trata de encontrar los puntos del plano que equidistan de los puntos 2 y 3. Sin realizar ningún cálculo es fácil ver que esos puntos son los de la recta x=2.5.

8 Calcular el siguiente número complejo: $z = \dfrac{\sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{3\pi}{2}i} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \overline{i^{101}}}{\left(1+i\right)^3}$

Solución

Se tiene que

$$z = \frac{\sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{3\pi}{2}i} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \overline{i^{101}}}{\left(1+i\right)^3} = \frac{\sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{3\pi}{2}i}\, e^{-\frac{\pi}{3}i}\, \overline{i}}{\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^3} = \frac{\sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{3\pi}{2}i}\, e^{-\frac{\pi}{3}i}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}}$$

$$= 2^{1/6-3/2} e^{\left(-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)i} = 2^{-\frac{4}{3}} e^{-\frac{17\pi}{6}i}$$

9 Uno de los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia con centro en el origen tiene por coordenadas el punto ($P\left(-1,\sqrt{3}\right)$. Hallar las coordenadas de los otros vértices y escribirlas en forma binómica y en forma exponencial.

Solución

Los vértices del hexágono son:

$$z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)} \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$z_k = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$z_0 = -1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \quad z_1 = -2 = 2e^{\pi i} \quad z_2 = -1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z_3 = 1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad z_4 = 2 = 2e^{0i} \quad z_5 = 1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

10 Representar el conjunto de números complejos z que verifican $|z| \geq |2z-1|$.

Solución

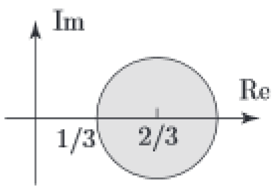
El conjunto de los números complejos que verifican $|z| \geq |2z-1|$ son aquellos $z = x+iy = (x,y)$ que verifican

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 4x^2-4x+1+4y^2 \Leftrightarrow$$

$$3x^2+3y^2-4x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{9}$$

Se trata del círculo de centro (2/3,0) y radio 1/3.



$|z| \geq |2z-1|$

11 Dado el número complejo

$$z = \frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}}-1)\cdot 2_{-\frac{\pi}{4}} \cdot i^{43}}{3\sqrt{3}-3i}$$

calcular su expresión en forma binómica y exponencial.

Solución

$$z = \frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}}-1)\cdot 2_{-\frac{\pi}{4}} \cdot i^{43}}{3\sqrt{3}-3i} = \frac{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2isen\left(\frac{\pi}{3}\right)-1\right)2e^{-\frac{\pi}{4}i}(-i)}{6e^{-\frac{\pi}{6}i}} =$$

$$= \frac{\left(1 + i\sqrt{3} - 1\right) 2e^{-\frac{\pi}{4}i}\left(-i\right)}{6e^{-\frac{\pi}{6}i}} = \frac{\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}\, 2e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{2}i}}{6e^{-\frac{\pi}{6}i}} = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)i} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right) i$$

Test de autoevaluación

Test de 10 preguntas de repaso del contenido del tema

http://giematic.com/PlanRecCI/Test/T2A/index.html

Material de consulta

Unidad didáctica interactiva

https://proyectodescartes.org/Un_100/materiales_didacticos/_Un_010_Complejos/index.html

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

DEFINICIONES BÁSICAS

1 Primeros conceptos

Una función real de variable real es una correspondencia entre dos conjuntos de números reales de forma que a cada elemento del conjunto inicial D (variable independiente) le corresponda un único elemento del conjunto final (variable dependiente).

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

Al conjunto D se llama dominio de la función y al conjunto de todos los valores imágenes de elementos de D se llama rango de la función.

Si f es una función con dominio D su gráfica consiste en el conjunto de puntos del plano siguiente:

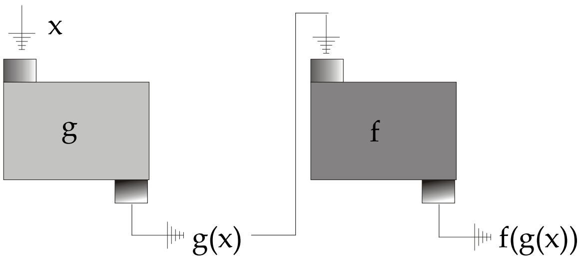
$$\{(x, f(x)) \,/\, x \in D\}$$

2 Operaciones entre funciones

Las funciones pueden sumarse, restarse, multiplicarse y también dividirse cuando el denominador es cero,

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad (fg)(x) = f(x)\,g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(si \;\; g(x) \neq 0\right)$$

Composición de funciones: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. El dominio de la función compuesta $f \circ g$ está formado por los puntos del dominio de g para los que $g(x)$ está en el dominio de la función f.



3 Transformaciones elementales

Traslación vertical	Conocida la gráfica de $y = f(x)$, se puede obtener la gráfica de $y = f(x) + k$ haciendo una traslación vertical de k unidades. • Si k>0 la traslación será hacia arriba • Si k<0 la traslación será hacia abajo.

Traslación horizontal	Conocida la gráfica de $y = f\left(x\right)$, se puede obtener la gráfica de $y = f\left(x + k\right)$ haciendo una traslación horizontal de k unidades. • Si k>0 la traslación será hacia la izquierda • Si k<0 la traslación será hacia la derecha.
Simetría respecto al eje OX	Conocida la gráfica de $y = f\left(x\right)$, se puede obtener la gráfica de $y = -f\left(x\right)$ haciendo una simetría respecto al eje de abscisas.
Simetría respecto al eje OY	Conocida la gráfica de $y = f\left(x\right)$, se puede obtener la gráfica de $y = f\left(-x\right)$ haciendo una simetría respecto al eje de ordenadas.
Escalado o dilatación/contracción horizontal	Conocida la gráfica de $y = f\left(x\right)$, se puede obtener la gráfica de $y = f\left(ax\right)$ haciendo un cambio de escala en el eje OX.
Escalado o dilatación/contracción vertical	Conocida la gráfica de $y = f\left(x\right)$, se puede obtener la gráfica de $y = k\,f\left(x\right)$ haciendo un cambio de escala en el eje OY.

4 Clasificación de funciones

Las funciones elementales se clasifican de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\text{Funciones}\begin{cases}\text{Algebraicas}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteras (Polinómicas)}\\ \text{Fraccionarias (Racionales)}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Trigonométricas}\\ \text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\end{cases}\end{cases}$$

- Funciones algebraicas son aquellas en las que la variable x está afectada de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación de exponente racional.
- Funciones polinómicas (o racionales enteras) son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

- Funciones racionales (o racionales fraccionarias) son cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

- Funciones irracionales. Cuando la variable independiente aparece bajo el signo radical o elevada a exponente racional no entero:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4} \quad , \quad g(x)=\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+5x}}$$

- Funciones trascendentes son aquellas que no son algebraicas:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen} 3x-\operatorname{tg} x}{\cos x} \quad , \quad g(x)=e^{1/x} \quad , \quad h(x)=\log\left(x^2-4\right)$$

5 Simetría de funciones

Una función f es simétrica respecto del eje de ordenadas (función *par*) si verifica:

$$f(x)=f(-x)\,, \qquad \forall x\in Dom\ f$$

Una función f es simétrica respecto del origen de coordenadas (función *impar*) si verifica:

$$f(x)=-f(-x)\,, \qquad \forall x\in Dom\ f$$

6 Funciones periódicas

Una función f es periódica, de periodo T siendo $T>0$ si verifica:

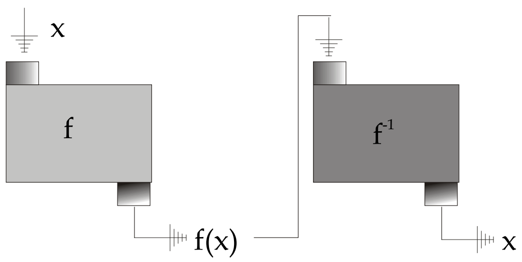
$$f\left(x+T\right)=f\left(x\right) \qquad , \qquad \forall\ x\in Dom\ f$$

Llamaremos *periodo principal* de la función al menor valor positivo T que verifica $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)\ \forall\ x\in Dom\ f$. Es fácil ver que si T es periodo también lo será cualquier múltiplo de T.

7 Funciones inversas

La función inversa de una función inyectiva f en un dominio D es una función que se denotará por f^{-1} que cumple

$$\forall y\in \operatorname{Im} f \qquad f^{-1}(y)=x \quad siendo \quad f(x)=y$$

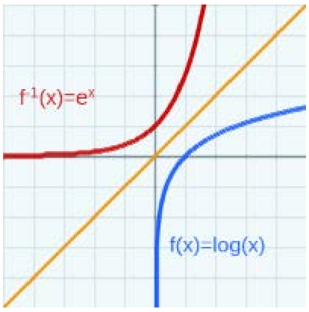


Una función y su inversa verifican las siguientes propiedades:

1. La composición de ambas es la función identidad

$$\left(f\circ f^{-1}\right)\left(x\right)=\left(f^{-1}\circ f\right)\left(x\right)=I\left(x\right)=x$$

2. Las gráficas de f y de f^{-1}, referidas al mismo sistema de coordenadas, son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.



$$Dom\, f^{-1} = \operatorname{Im} f \qquad \operatorname{Im} f^{-1} = Dom\, f$$

3. Si $f\left(x\right)$ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, su inversa gozará de la misma propiedad.

Ejemplo: La función $f\left(x\right) = x^2$ tiene por función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ya que se verifica:

$$f \circ f^{-1}\left(x\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \;; \quad f^{-1} \circ f\left(x\right) = f^{-1}\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = x$$

8 Descomposición en fracciones simples de funciones racionales

Se llama función racional $R(x)$, a toda función en la que sólo se efectúan con x las cuatro operaciones racionales. Cualquier función racional puede expresarse como cociente de polinomios:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

En el caso de que $Grado\ Q\left(x\right) > Grado\ P\left(x\right)$, para *descomponer en fracciones simples* se debe descomponer $Q(x)$ en factores irreducibles. Suponiendo que $Q\left(x\right)$ no tenga raíces complejas múltiples se podrá escribir:

$$Q\left(x\right) = \left(x - x_1\right)^{m_1}\left(x - x_2\right)^{m_2} \cdots \left(x - x_q\right)^{m_q} \cdot \left[a_1 x^2 + b_1 x + c_1\right] \cdots \left[a_j x^2 + b_j x + c_j\right]$$

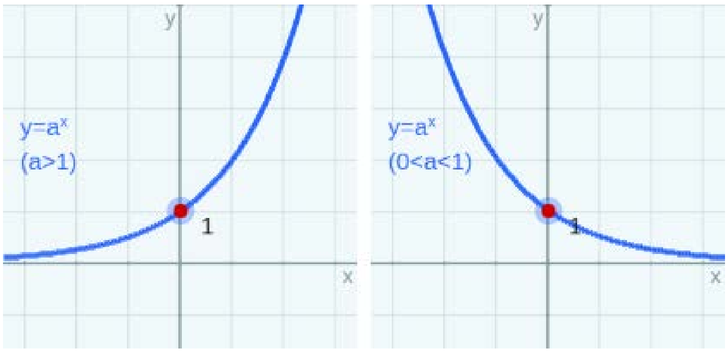
donde $x_1, x_2, \ldots, x_q$ son raíces reales y $a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \ldots,\ a_j x^2 + b_j x + c_j$ son polinomios cuadráticos con raíces complejas.

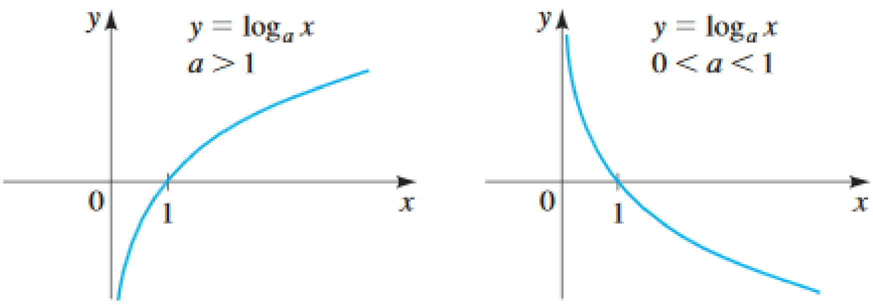
La descomposición en fracciones simples en este caso será:

$$\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)} = \frac{A_1}{\left(x - x_1\right)} + \frac{A_2}{\left(x - x_1\right)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{\left(x - x_1\right)^{m_1}} + \frac{B_1}{\left(x - x_2\right)} + \frac{B_2}{\left(x - x_2\right)^2} + \cdots + \frac{B_{m_2}}{\left(x - x_2\right)^{m_2}} + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \cdots + \frac{\alpha_j x + \beta_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j}$$

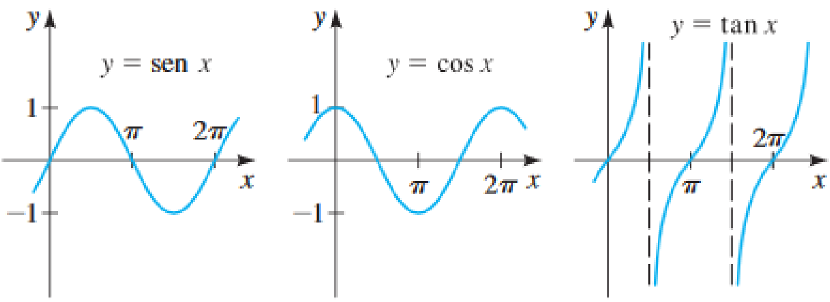
FUNCIONES ELEMENTALES

9 Funciones exponenciales y logarítmicas



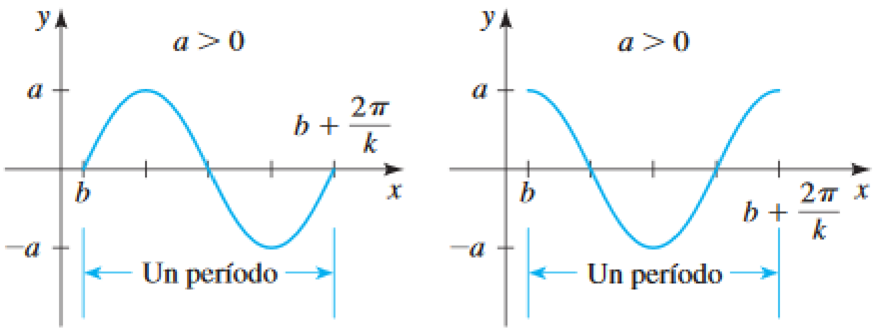


10 Funciones trigonométricas



11 Funciones seno y coseno

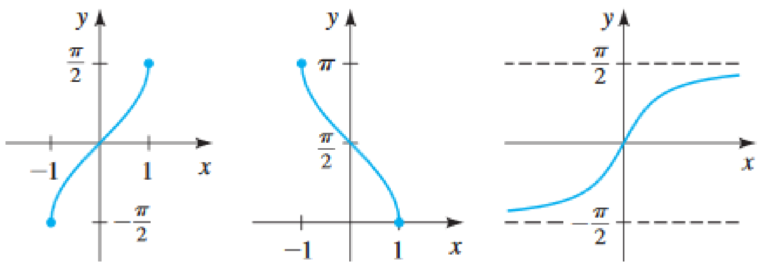
$$y = a \operatorname{sen} k\left(x - b\right) \qquad \left(k > 0\right) \qquad\qquad y = a \cos k\left(x - b\right) \qquad \left(k > 0\right)$$



amplitud: $|a|$ período: $2\pi \,/\, k$ desfase: b

12 Gráficas de funciones inversas trigonométricas

$y = arc\,\mathrm{sen}\, x$ $y = \arccos x$ $y = arctgx$

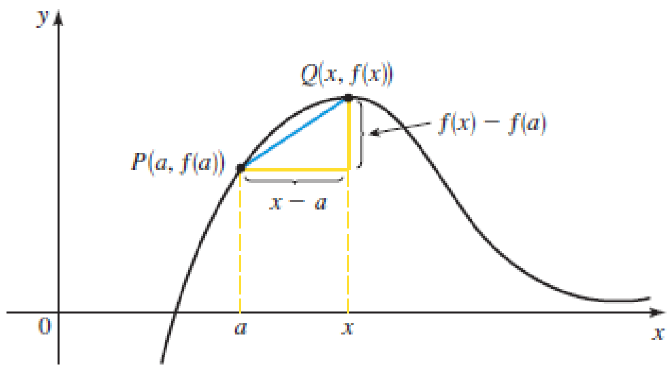


DEFINICIÓN DE DERIVADA. REGLAS DE DERIVACIÓN

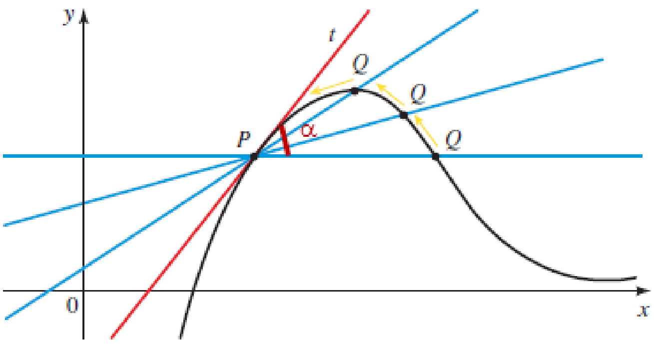
13 Definición de derivada

La expresión $\dfrac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}$ se denomina *cociente incremental* de f en el punto a para un valor de $\Delta x = x - a$.

Esta expresión representa la pendiente de la secante a la gráfica de la función f que une los puntos $\left(a, f\left(a\right)\right)$ y $\left(x, f\left(x\right)\right) = \left(a+\Delta x, f\left(a+\Delta x\right)\right)$.



Definición (Derivada).- La derivada de una función $y = f(x)$ *en un punto* a *es el límite del cociente incremental,* $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$



Este valor representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f *en el punto* $(a, f(a))$*. Se denota por* $f'(a)$ *ó* $\frac{dy}{dx}(a)$ *ó* $\frac{df}{dx}(a)$

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Si una función f es derivable en el punto a la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Si $f'(a) \neq 0$, la ecuación de la recta normal es $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$.

14 Reglas de derivación

REGLAS DE DERIVACIÓN $f = f(x)$, $g = g(x)$, $a \in \mathbb{R}$		
Producto por un número	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$	
Suma y resta	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
Producto y cociente	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Composición	$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	
Derivada de la función inversa	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ *con* $f^{-1}(x) = y$	

Regla de la cadena

Si $y = f(u)$ es derivable en $g(x)$ y $u = g(x)$ es derivable en x, entonces la función compuesta $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x, siendo la derivada

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

que se puede expresar también con la siguiente notación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

La dependencia de unas variables respecto de otras se puede indicar mediante un diagrama de dependencia, que para este caso sería: y ——— u ——— x

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo potencial	$y = x^{a}$ $y = \left[f\left(x\right)\right]^{a}$	$y' = a \cdot x^{a-1}$ $y' = a\left[f\left(x\right)\right]^{a-1} \cdot f'\left(x\right)$
	$y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{f\left(x\right)}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $y' = \dfrac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}$
Tipo exponencial	$y = e^{x}$ $y = e^{f(x)}$	$y' = e^{x}$ $y = e^{f(x)} \cdot f'\left(x\right)$
	$y = a^{x}$ $y = a^{f(x)}$	$y = a^{x} \cdot \log a$ $y = a^{f(x)} \cdot f'\left(x\right) \cdot \log a$
Tipo logarítmico	$y = \log x$ $y = \log f\left(x\right)$	$y' = \dfrac{1}{x}$ $y' = \dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}$
	$y = \log_{a} x$ $y = \log_{a} f\left(x\right)$	$y' = \dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{\log a}$ $y' = \dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}.\dfrac{1}{\log a}$
Tipo seno	$y = \operatorname{sen} x$ $y = \operatorname{sen}\left(f\left(x\right)\right)$	$y' = \cos x$ $y' = f'\left(x\right)\cos f\left(x\right)$
Tipo coseno	$y = \cos x$ $y = \cos\left(f\left(x\right)\right)$	$y' = -\operatorname{sen} x$ $y' = -f'\left(x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(f\left(x\right)\right)$
Tipo tangente	$y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{tg}\left(f\left(x\right)\right)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^{2} x} = 1 + tg^{2}x$ $y' = \dfrac{1}{\cos^{2} f\left(x\right)}.f'\left(x\right)$
Tipo cotangente	$y = \operatorname{cotg} x$ $y = \operatorname{cotg}\left(f\left(x\right)\right)$	$y' = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^{2} x}$ $y' = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^{2} f\left(x\right)} \cdot f'\left(x\right)$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Funciones arco	$y = \operatorname{arcsen} x$ $y = \operatorname{arcsen} f(x)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$y = \arccos x$ $y = \arccos f(x)$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$y = \operatorname{arctg} x$ $y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $y' = \dfrac{1}{1+f^2(x)} . f'(x)$

15 Derivada de la función implícita

Cuando la función viene dada en forma explícita, es decir, de la forma $y = f(x)$ calcular la derivada de f se reduce a aplicar la definición o alguna de las reglas de derivación estudiadas. Sin embargo, muchas veces una función viene dada a través de una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$ en la que no es fácil, o resulta imposible, obtener explícitamente y en función de x. Este tipo de funciones reciben el nombre de *funciones implícitas de una variable*.

> *Definición (Función implícita).- Una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$ define a la variable y como función implícita de x, en un entorno de (x_0, y_0), si existe un intervalo D centrado en x_0 de forma que, para todo x en D, existe $y = f(x)$ tal que se verifica $F(x, f(x)) = 0$.*

Para este tipo de funciones se debe proceder de la siguiente manera para obtener la derivada de y respecto de x:

1. Se derivan ambos miembros de la expresión con respecto a x, aplicando la regla de la cadena, teniendo en cuenta que y es función de x.

2. Se despeja la expresión $\dfrac{dy}{dx}$.

   Por ejemplo, si se considera la función dada mediante $x^3y^2 + y^8 - 3x - 5 = 0$ se tendrá:

3. Derivando ambos lados de la igualdad y aplicando la regla de la cadena suponiendo que y es función de x

$$3x^2y^2+2x^3y\frac{dy}{dx}+8y^7\frac{dy}{dx}-3=0$$

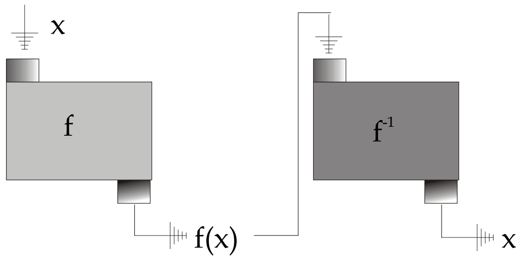
4. Despejando

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-3x^2y^2}{2x^3y+8y^7}$$

16 Derivada de la función inversa

Si $y=f(x)$ es una función inyectiva y derivable en x y además $f'(x)\neq 0$, entonces la función inversa, f^{-1}, también es derivable en $y=f(x)$, verificándose

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$



17 Derivada enésima

Si $y=f(x)$ es derivable en un dominio D queda definida la función derivada:

$$\begin{aligned} f':D &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x) \end{aligned}$$

Si esta función $f'(x)$ a su vez es derivable se puede calcular su derivada, $(f')'(x)$, que recibe el nombre de derivada segunda. Se denota, $f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$

Este proceso puede continuar y se tendría la derivada de orden n o derivada enésima que consistiría en derivar la función n veces. Si la función es $y=f(x)$ se denotará:

$$f^{(n}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

FÓRMULA DE LEIBNIZ (Derivada enésima de un producto).- Si f y g son derivables hasta el orden n entonces la función $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable hasta el orden n y además

$$h^{(n}(x) = (f \cdot g)^{(n}(x) =$$

$$= \binom{n}{0} f(x) g^{(n}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1}(x) + \ldots + \binom{n}{n-1} f^{(n-1}(x) g'(x) + \binom{n}{n} f^{(n}(x) g(x)$$

Nota 1

El factorial de un número natural n se define como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

Por ejemplo,

$$1! = 1 \qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2 \qquad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Se cumple que $n! = n \cdot (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$

Nota 2

Los números combinatorios se definen como

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

siendo n un número natural y $0 \le m \le n$

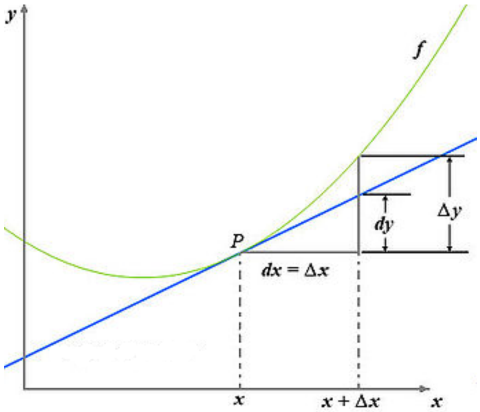
El número combinatorio $C_{n,m}$ representa el número de grupos distintos de m elementos que se pueden formar a partir de n objetos, de forma que cada grupo se diferencie de otro en algún elemento (combinaciones de n elementos tomados de m en m).

18 Recta tangente. Aproximación lineal

Definición (Diferencial).- Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número x,

- *La diferencial de x es igual al incremento de x, $\Delta x = dx$*
- *La diferencial de y se define como $dy = f'(x)dx$*

Interpretación geométrica: La diferencial de y para un incremento de x, $\Delta x = dx$, es igual al incremento de la ordenada de la recta tangente correspondiente a ese incremento de x.



Diferencial segunda

$$d^2y = d\left(dy\right) = d\left[f'(x)dx\right] = \left[df'(x)\right]dx + f'(x)\left[d\left(dx\right)\right] =$$
$$= \left[f''(x)dx\right]dx + f'(x)d^2x = f''(x)\left(dx\right)^2 + f'(x)d^2x$$

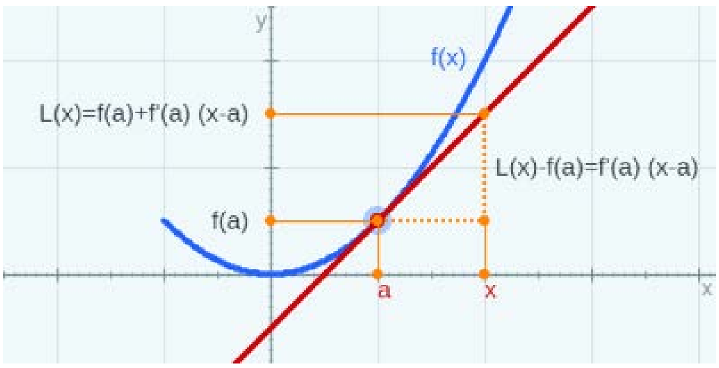
Aproximación lineal. Consideremos la gráfica de una función $y = f\left(x\right)$ derivable en el punto a. Si dibujamos la tangente en el punto $\left(a, f\left(a\right)\right)$ vemos que para valores x próximos al punto a, los valores que toman la ordenada de la recta tangente y la función casi coinciden. Diremos por ello que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a es una linealización (aproximación lineal) de la función en ese punto.

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(a, f\left(a\right)\right)$ tiene por pendiente $f'\left(a\right)$ se tendrá que su ecuación es:

$$y - f\left(a\right) = f'\left(a\right)\left(x-a\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f\left(a\right) + f'\left(a\right)\left(x-a\right)$$

La expresión $L\left(x\right) = f\left(a\right) + f'\left(a\right)\left(x-a\right)$ se denomina **linealización** (aproximación lineal) de f en a

$$f\left(x\right) \approx L\left(x\right) = f\left(a\right) + f'\left(a\right)\left(x-a\right)$$



Ejercicios propuestos

1

(a) Para $g(x)=\dfrac{1}{x}$, encuentra y simplifica $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$

(b) ¿Cuál de las siguientes expresiones son funciones y por qué?

$y=-2x+7$ $\qquad y^2=x$

$y=x^2+4x-1$ $\qquad x=2$

(c) Determinar el dominio de las siguientes funciones

$f_1(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ $\qquad f_2(x)=\log(x^2-2)$

$f_3(x)=e^{x+5}+|x|$ $\qquad f_4(x)=\dfrac{x+1}{x^3+2x^2+x}$

$f_5(x)=\log\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

2

Dadas las siguientes funciones

(b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ $\quad (x=2)$

(b) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ $\quad (x=-1)$

(c) $f(x)=\cos\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{4}$

(d) $f(x)=\cos 10x+\cos(10+\pi)x$

(e) $f(x)=\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad (x=1)$

(f) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad (x=-1)$

Se pide:

1. Obtener su dominio.
2. Calcular el límite en $x=0$, o en los puntos indicados.
3. Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$.
4. Estudiar las simetrías, y la periodicidad.

3

Dibujar de forma aproximada la gráfica de las siguientes funciones elementales e indicar si se trata de funciones pares o impares:

a) $y=x^2-4x+6$ $\qquad$ b) $y=-\operatorname{arctg}(x)$

c) $y=\cos(-x)$ $\qquad$ d) $y=-\operatorname{tg}x$

e) $y=e^{-x}+5$ $\qquad$ f) $xy=-9$

g) $y=(x-1)^2$ $\qquad$ h) $y=1+\log x$

i) $y=\sqrt{x-1}$ $\qquad$ j) $y=-\sqrt{x+3}$

k) $y=1-\sqrt{x}$ $\qquad$ l) $y=\dfrac{1}{x}+3$

m) $y=|x+3|$ $\qquad$ n) $y=\operatorname{Ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

ñ) $y=\operatorname{Sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

4

Utilizando las transformaciones elementales y conocidas las gráficas de las funciones elementales, representar las gráficas de las funciones siguientes:

$f_1(x)=1-e^{-x}$

$f_2(x)=\log(x-2)-1$

$f_3(x)=3\operatorname{sen}(4x-\pi)+2$

$f_4(x)=tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad f_5(x)=2+arctg(x)$

$f_6(x)=2\,arc\operatorname{sen}(x)$

5

Dada la función $f(x)=\dfrac{x(\log x)^2}{(x-1)^2}$. Se pide determinar y representar su dominio. ¿Se podría asignar a $f(x)$ algún valor en los puntos de discontinuidad para que f sea continua en el intervalo (0,∞)?

Solución:

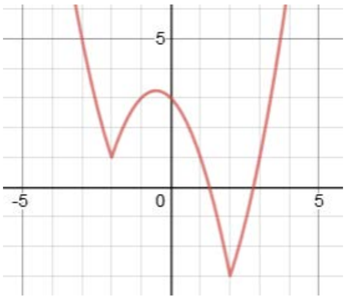
Dom f = $(0,\infty)-\{1\}=\mathbb{R}^+-\{1\}$. Se puede redefinir $f(x)$ para que sea continua en $(0,\infty)$

Asignando *f(1)* = 1, se evita la discontinuidad de *f(x)* en el punto x = 1.

6

Analizar la continuidad y derivabilidad de la función y representar su gráfica $f(x)=|x^2-4|-|x+2|+1$.

Solución: $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ y es derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.



7 Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. Determinar la relación entre los parámetros a, b y c para que las gráficas de las dos funciones se corten en el punto $(1,2)$.
2. Determinar los valores de a, b y c para que cumpliéndose las condiciones anteriores, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan en el punto $(1,2)$ la misma tangente.

Solución:

1.) $a = 1 - b \qquad c = -1$

2.) $a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = -1$

8 Realiza los test de repaso de conocimientos previos

1. Funciones elementales
2. Funciones

9 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \frac{1}{5}(3x^2)^{-\frac{4}{5}} \cdot (6x) = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{81x^3}}$
2. $y = 5^{3x-4}$	$\log y = (3x-4)\log 5 \;\rightarrow\; \frac{1}{y}y' = 3\log 5 \;\rightarrow\; y' = 5^{3x-4}(3\log 5)$
3. $y = \log(x^2 + 7x)$	$y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$
4. $y = x^2 \cos x$	$y' = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x$
5. $y = \cos 3x^2$	$y' = -6x \operatorname{sen} 3x^2$
6. $y = \operatorname{tg} 7x$	$y' = \frac{7}{\cos^2 7x}$ También se puede resolver aplicando la derivada del cociente a la función $y = \frac{\operatorname{sen} 7x}{\cos 7x}$.
7. $y = \frac{2x^2}{x^3-1}$	$y' = \frac{4x(x^3-1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-2x^4 - 4x}{(x^3-1)^2}$

8.	$y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\operatorname{sen}2x}{1-\operatorname{sen}2x}}$ (Sugerencia: utilizar derivación logarítmica) Se toman logaritmos, $\log y=\dfrac{1}{3}\log(1+\operatorname{sen}2x)-\dfrac{1}{3}\log(1-\operatorname{sen}2x)$ Se deriva, $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{3}\dfrac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen}2x}+\dfrac{1}{3}\dfrac{2\cos 2x}{1-\operatorname{sen}2x}=\dfrac{4}{3}\dfrac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen}^2 2x}=\dfrac{4}{3\cos 2x}$ $y'=\dfrac{4}{3\cos 2x}\sqrt[3]{\dfrac{1+\operatorname{sen}2x}{1-\operatorname{sen}2x}}$
9.	$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]=\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
10.	$y=\dfrac{1}{\log\left(x^{1/2}+2x\right)}$ $y=\left[\log\left(x^{1/2}+2x\right)\right]^{-1}$ $\quad y'=-\left[\log\left(x^{1/2}+2x\right)\right]^{-2}\dfrac{1}{x^{1/2}+2x}\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}+2\right)$ $y'=-\dfrac{1+4\sqrt{x}}{2\left(x+2x\sqrt{x}\right)\left[\log\left(\sqrt{x}+2x\right)\right]^2}$

10 (a) Deduce la expresión de la derivada de las siguientes funciones inversas:

$f(x)=arctgx$ $\qquad g(x)=\arcsin(x)$

$h(x)=ar\cos(x)$

(b) Dada las funciones f y g derivables se considera la función $h(x)=f\left(x^2 g(x)\right)$.

Calcula $h'(2)$ sabiendo que: $g(2)=1$, $g'(2)=2$, $f(4)=3$, $f'(4)=4$

11 Hallar de forma aproximada los siguientes valores, utilizando la aproximación lineal

$(a)\quad \log(0.9)\qquad (b)\quad e^{0.4}$

$(c)\quad \sqrt[3]{70}\qquad (d)\quad \sqrt[3]{8'02}$

Solución: $(a)\quad \log(0.9)\approx -0.1$

$(b)\quad e^{0.4}\approx 1.4\quad (c)\quad \sqrt[3]{70}\approx 4.125$

$(d)\quad \sqrt[3]{8'02}\approx 2+\dfrac{0.005}{3}\approx 2'0016667$

12 La arista de un cubo es de 6 cm, con un error posible de 0,05 cm. Si se calcula el volumen del cubo a partir de esta medida, se pide:

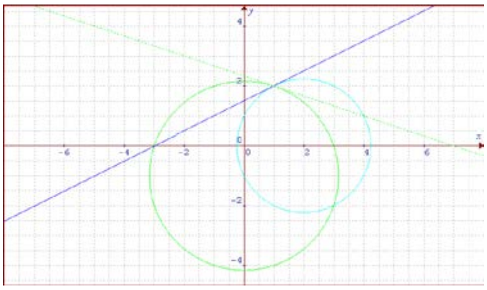
a) Estimar, utilizando aproximación lineal, el máximo error posible en el cálculo de dicho volumen.
b) Expresar el error estimado en el apartado anterior como porcentaje del volumen del cubo.
c) Para una arista y un error de medida dados, ¿Qué relación hay entre el porcentaje de error del volumen y el de la arista?

13 Un estudio del medio ambiente de cierta comunidad suburbana indica que el nivel medio de monóxido de carbono en la atmósfera es de $C(p)=\sqrt{0,5p^2+17}$ partes por millón cuando la población es p miles de personas. Se estima que, dentro de t años, la población será de $p(t)=3,1+0,1t^2$ miles de

personas. ¿Cuál será la tasa de variación del nivel de monóxido de carbono, $\frac{dC}{dt}$, con respecto al tiempo dentro de tres años?
Solución: $0,24 \ partes \ por \ millón \ / \ año$

14 Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de observación situada en el suelo a 5km de la plataforma de lanzamiento. Supón que el ángulo de elevación de la visual hacia el cohete aumenta a razón de 3grados/seg cuando $\theta = 60^o$. Calcula la velocidad del cohete en ese momento.
Solución: $1200\pi \ km \ / \ h$

15 Calcular los ángulos que forman al cortarse las curvas definidas por $x^2 + y^2 - 4x = 1$, $x^2 + y^2 + 2y = 9$

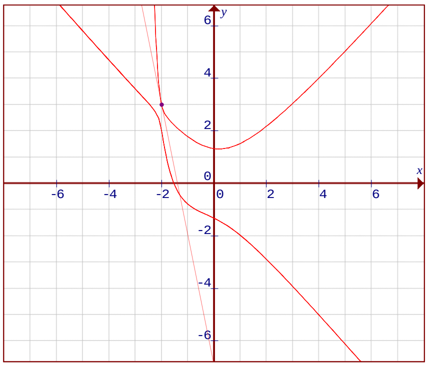


Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo determinado por sus rectas tangentes.
Se puede calcular así $tg\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ donde m1 y m2 son las pendientes de las rectas tangentes a ambas curvas en el punto de intersección.
Solución: Hay dos puntos de corte entre las dos curvas, los puntos (1, 2) y (3,-2). El ángulo que forman al cortarse vale: $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Este ángulo es el mismo en los dos puntos de intersección de ambas curvas.

16 Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva
$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$
en el punto $(-2, 3)$
Representar con Matlab las gráficas definidas por las ecuaciones de los apartados anteriores, en un entorno de los puntos dados.

Solución: Recta tangente: $y - 3 = -\frac{9}{2}(x + 2)$

Recta normal: $y - 3 = \frac{2}{9}(x + 2)$



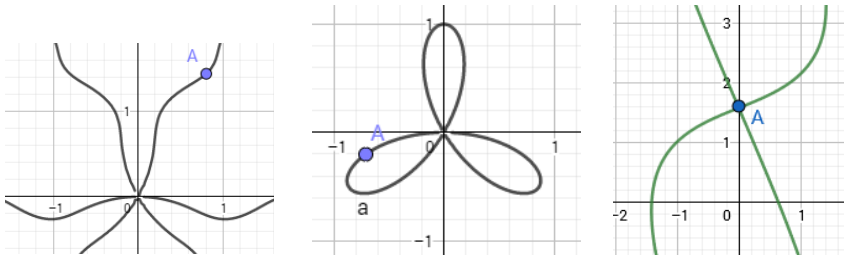
17 Determinar los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuyas distancias al punto $(6, 0)$ sean mínimas.
Solución: Los puntos son el $(2, 4)$ y el $(2, -4)$.
La distancia mínima es $4\sqrt{2}$.

18 Se quiere fabricar latas cilíndricas para bebidas refrescantes, de 200 cm3 de capacidad, utilizando la mínima cantidad posible de material. Indicar las dimensiones (radio de la base y altura) que garanticen la mínima superficie.
Solución: El radio de la base y la altura de la lata que hacen mínima la superficie son
radio = $\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$ cm ; altura = $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$ cm ;
superficie mínima = $6 \cdot \sqrt[3]{100^2 \pi}$ cm2.

Ejercicios resueltos

CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES

1 Determinar cuáles de las siguientes curvas son las gráficas de una función y dependiente de x en las proximidades del punto A señalado en la figura. Justifica la respuesta



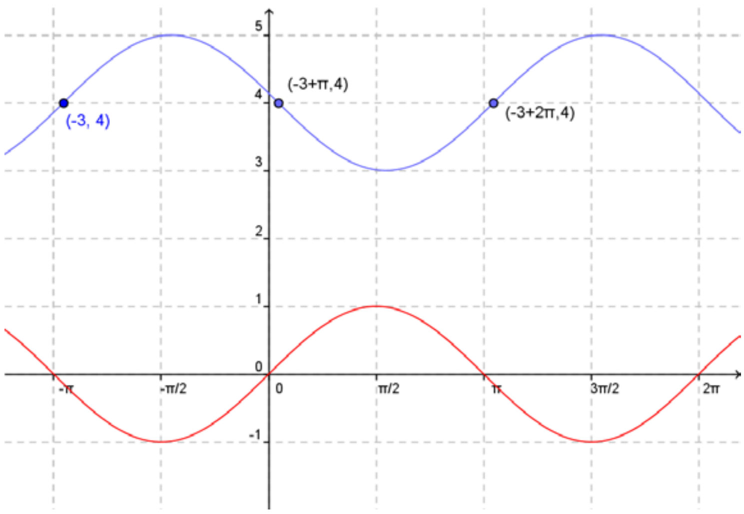
Solución

Las dos primeras figuras representan curvas en las que en un entorno del punto A se define una función y dependiente de x.

2 Si $f(x)$ es una función de una variable definida en el conjunto de los números reales, ¿qué relación tiene la gráfica de $f(x)$ y la de la función $g(x) = f(x+3)+4$? Haz la representación de estas dos funciones cuando se considera $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Solución

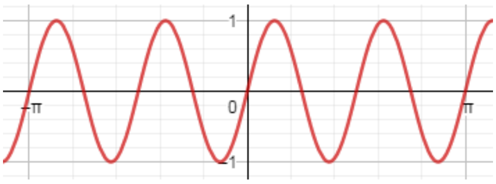
La gráfica de g es la gráfica de la función f trasladada horizontalmente 3 unidades a la izquierda y 4 unidades verticalmente hacia arriba. En el caso de que $f(x) = sen(x)$ las gráficas de f y g aparecen representadas en la siguiente imagen:



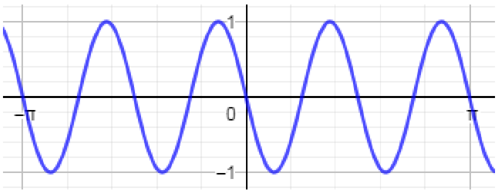
3 Aplicando transformaciones elementales a las función trigonométrica adecuada, representar la gráfica de la función $f\left(x\right)=3\,sen\left(4x-\pi\right)+2$.

Solución

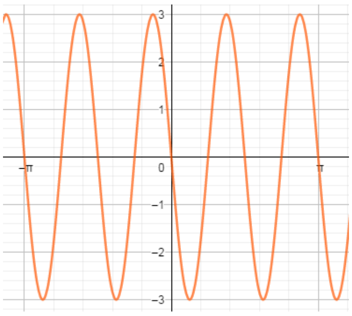
$y=sen\left(4x\right)$



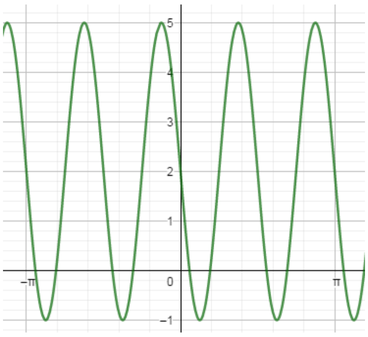
$y=sen\left(4x-\pi\right)=-sen\left(4x\right)$



$y=3sen\left(4x-\pi\right)$



$y=3sen\left(4x-\pi\right)+2$



4 Determina el dominio, simetría y periodicidad de la función $f\left(x\right)=sen\ 3x+\left|sen\ 3x\right|$. Representa su gráfica.

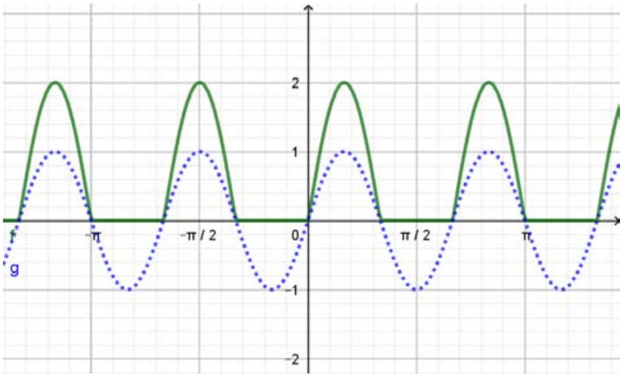
Solución

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2sen\left(3x\right) & si\ \ sen\left(3x\right)>0\\ 0 & si\ \ sen\left(3x\right)\le 0\end{cases}$$

Como

$$sen\left(3x\right) > 0 \Rightarrow 0 + 2k\pi < 3x < \pi + 2k\pi \Rightarrow \frac{2k\pi}{3} < x < \frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

La gráfica de la función será la que se muestra en verde en la figura siguiente:



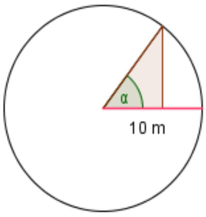
Se trata de una función cuyo dominio es todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, no tiene simetría ni par ni impar:

$$f\left(-x\right) = sen\left(-3x\right) + \left|sen\left(-3x\right)\right| = -sen\left(3x\right) + \left|sen\left(3x\right)\right|$$

Es periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{3}$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + \left|sen\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\right| =$$
$$= sen\left(3x + 2\pi\right) + \left|sen\left(3x + 2\pi\right)\right| = sen3x + \left|sen\ 3x\right|$$

5 Considerar la región sombreada



a. Expresa el área de del triángulo representado en la figura anterior en función de α, $A = f\left(\alpha\right)$, cuando $\alpha \in \left[0, \pi\right]$. Nota: 10m es el radio de la circunferencia.
b. Haz una representación gráfica de la función $y = f\left(\alpha\right)$ en el intervalo $\left[0, \pi\right]$ a partir de la gráfica de la función seno.
c. Escribe las instrucciones Matlab para hacer la representación de la función área en el intervalo $\alpha \in \left[0, \pi\right]$.

Solución

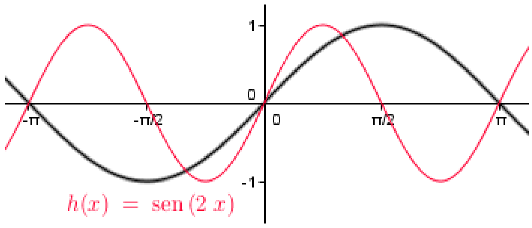
(a) El área del triángulo es $A = \frac{base \cdot altura}{2}$. Si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se tiene que:

$$\cos\alpha = \frac{base}{10} \text{ y } sen\alpha = \frac{altura}{10}$$

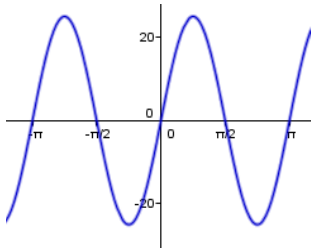
En consecuencia función área será:

$$A = \begin{cases} f(\alpha) = \dfrac{10sen\alpha\, 10\cos\alpha}{2} = 50\ sen\alpha\ \ \cos\alpha = 25sen(2\alpha) & si\ \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ f(\pi - \alpha) & si\ \alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

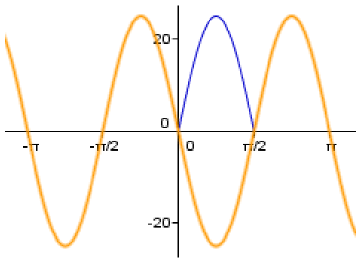
(b) Haciendo una contracción horizontal de la gráfica de $sen(x)$ de razón 2, se obtiene la de la función $sen(2x)$ que es periódica de periodo π



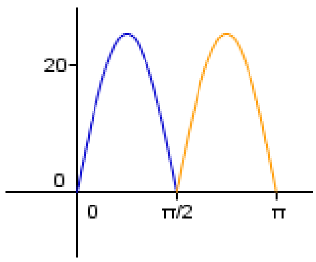
Mediante una dilatación vertical se obtiene la gráfica de la función $25sen(2x)$



La gráfica de $f(\pi - x)$ es el resultado de hacer un reflejo respecto al eje Y junto con un desplazamiento de π unidades (su periodo). El resultado se muestra en naranja



La función área, $A(\alpha)$, en el intervalo $\alpha \in [0, \pi]$ es la siguiente



(c) El código Matlab pedido es:

```
t1=0:0.01:pi/2;
t2=pi/2:0.01:pi;
% f en el intervalo [0, pi/2]
f1=25*sin(2*t1);
% f en el intervalo [pi/2, pi]
f2=25*sin(2*(pi-t2));
plot(t1,f1,t2,f2)
```

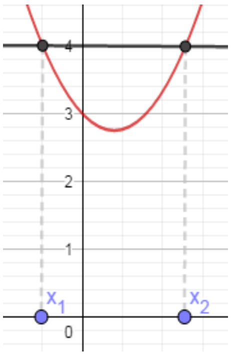
CONCEPTO DE DERIVADA. DIFERENCIAL

6 Dada la función $f(x) = x^2 - x + 3$

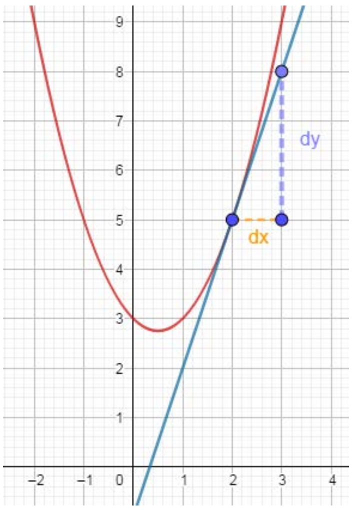
a. Determinar si la función es inyectiva justificando la respuesta.
b. Calcular la diferencial en el punto $x = 2$ y representa la gráfica de la función junto con la diferencial en el punto $x = 2$ para $dx = 1$.

Solución

a. No es inyectiva porque es una parábola.



b. Ver apuntes para ver la interpretación gráfica de la diferencial.



$$dy = f'(2)\,dx = 3 \cdot 1 = 3$$

7 (a) Dada la función $f\left(x\right)=\sqrt{1-x}$, se pide Calcular el valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, utilizando la diferencial primera en el punto 0.

(b)Para aproximar el valor de $\sqrt{a}$, se utiliza la recta tangente a la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto $b=1$ y se obtiene $\sqrt{a}\approx 1.05$. ¿Cuál será el punto *a*?

Solución

(a) Como $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ cuando x=1/2 , la aproximación pedida es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=f\left(\frac{1}{2}\right)\approx f\left(0\right)+f\,'\left(0\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

Teniendo en cuanta que

$$f\left(0\right)=1 \qquad f\,'\left(x\right)=-\frac{1}{2}\left(1-x\right)^{-1/2}\Rightarrow f\,'\left(0\right)=\frac{-1}{2}$$

se concluye: $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(b) Se tiene que

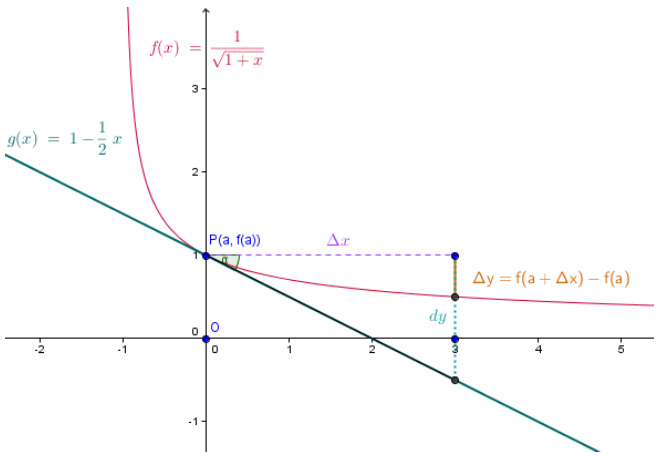
$$f(b+h)\approx f\left(b\right)+f\,'\left(b\right)h \quad \text{siendo} \quad f\,'\left(b\right)=\frac{1}{2\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2}\left(a-1\right)=1.05\Rightarrow\frac{1}{2}\left(a-1\right)=0.05\Rightarrow a=1.1$$

8 Se considera la función $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Calcula para esta función la diferencial en $a=0$ e $\Delta x=0.5$. Haz un bosquejo de esta función y representa el valor obtenido.

Solución

2. La diferencial es:



$$dy=f\,'\left(0\right)\Delta x=\frac{-1}{2}\cdot 0,5=-0,25$$

Nota: Para que se vea mejor la gráfica se ha considerado un incremento de valor $\Delta x = 3$.

9 ¿Qué precisión debe de tener la medida del radio r de una esfera para calcular el área de su superficie dentro de un 1% de su valor real? (Superficie de una esfera: $4\pi r^2$)

Solución

Sea Δr el error en la medida de r. Sea ΔS el error en la medida del área de la superficie, correspondiente al error Δr.

Sabemos que,

$$\left|\Delta S\right| \leq \frac{1}{100} S = \frac{1}{100} 4\pi r^2$$

La aproximación lineal de ΔS es

$$\Delta S \approx \frac{dS}{dr}\Delta r = 8\pi r \Delta r$$

Expresando la condición del enunciado se tiene,

$$\left|8\pi r \Delta r\right| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \Leftrightarrow \left|\Delta r\right| \leq \frac{r}{200} = \frac{0,5}{100} r$$

10 Calcular, utilizando la definición de derivada, una aproximación de sen(155°).

Solución

Como $155^o \dfrac{\pi\, rad}{180^0} = \dfrac{31\pi}{36} rad$, se tiene, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{sen\left(\frac{31\pi}{36}\right) - sen\left(\pi\right)}{\frac{31\pi}{36} - \pi} \approx \cos\left(\pi\right) \Rightarrow sen\left(\frac{31\pi}{36}\right) \approx -\left(\frac{31\pi}{36} - \pi\right) \Rightarrow sen\left(\frac{31\pi}{36}\right) \approx 0.43633$$

$$sen\left(\frac{31\pi}{36}\right)$$

REGLA DE LA CADENA

11 Un punto en el plano se mueve a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{sen^2(x)+1}$, de manera que la abscisa respecto al tiempo t es $x = \log(2t-1)$. Calcular la variación de la ordenada respecto del tiempo, $\frac{dy}{dt}$, cuando $t = 1$.

Solución

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{2}\left(sen^2 x + 1\right)^{-1/2} 2senx\cos x\right)\frac{2}{2t-1}$$

Cuando $t = 1$, $x = \log(1) = 0$ luego sustituyendo en la expresión anterior se tendrá:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \cdot 2 = 0$$

12 Sea $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$, sabiendo que $f'(0) = 0$ calcular $g'(\pi)$. Comprobar además el resultado obtenido para una función f concreta.

Solución

Aplicando la regla de la cadena,

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x \Rightarrow g'(\pi) = f'(\operatorname{sen}\pi)\cos\pi = f'(0)(-1) = 0$$

Por ejemplo, podemos considerar

$$f(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = f(\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x)^2$$

Se tendría para este ejemplo

$$g'(x) = 2(\operatorname{sen} x)(\cos x) \Rightarrow g'(\pi) = 2\operatorname{sen}\pi \cdot \cos\pi = 0$$

13 Dada las funciones f y g derivables se considera la función $h(x) = f\left(x^2 g(x)\right)$. Calcula $h'(2)$ sabiendo que: $g(2) = 1$, $g'(2) = 2$, $f(4) = 3$, $f'(4) = 4$.

Solución

Aplicando la regla de la cadena a la función $h(x) = f\left(x^2 g(x)\right)$ se tiene que:

$$h'(x) = f'\left(x^2 g(x)\right)\left(2xg(x) + x^2 g'(x)\right)$$

Sustituyendo en x=2

$$h'(2) = f'(4g(2))(4g(2) + 4g'(2)) = f'(4)(4+8) = 4 \cdot 12 = 48$$

14 Si g y h son funciones derivables calcular la primera derivada de la función $f\left(x\right)=g\left(x^2\right)+\dfrac{h\left(\sqrt{x}\right)}{x+\operatorname{sen}\left(3x\right)}$

Solución

Aplicando la regla de la cadena

$$f'\left(x\right)=2xg'\left(x^2\right)+\frac{h'\left(\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x+\operatorname{sen}\left(3x\right)\right)-h\left(\sqrt{x}\right)\left(1+3\cos\left(3x\right)\right)}{\left(x+\operatorname{sen}\left(3x\right)\right)^2}$$

15 a) Supongamos que un cubo de hielo se derrite conservando su forma cúbica y que éste volumen decrece proporcional al área de su superficie. ¿Cuánto tardará en derretirse si el cubo pierde ¼ de su volumen durante la primera hora?

b) ¿Qué precisión debe de tener la medida del radio r de una esfera para calcular el área de su superficie dentro de un 1% de su valor real? (Superficie de una esfera: $4\pi r^2$)

Solución

a) Se considera $x=x\left(t\right)$ el lado del cubo en el instante t, su volumen y su superficie es:

$$V=x^3 \qquad S=6x^2$$

Como el volumen decrece proporcional al área de la superficie se tendrá:

$$\frac{dV}{dt}=-K6x^2 \text{ es decir, } 3x^2\frac{dx}{dt}=-K6x^2 \qquad \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-2k$$

Integrando: $\dfrac{dx}{dt}=-2k \qquad \Rightarrow \qquad x\left(t\right)=-2kt+A$

Para t=0 se tiene que $x\left(0\right)=A$, luego A es el lado del cubo antes de empezar el deshielo.

Como además se sabe que el cubo de hielo disminuye ¼ de su volumen en la primera hora se tiene que:

$$V\left(0\right)-V\left(1\right)=\frac{1}{4}V\left(0\right) \Rightarrow \qquad V\left(1\right)=\frac{3}{4}V\left(0\right)$$

$$\left(-2k+A\right)^3=\frac{3}{4}A^3 \qquad -2k+A=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}A \qquad \Rightarrow \qquad 2k=\left(1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)A$$

lo que nos da una relación entre la constante k y el lado inicial del cubo A,

$$\frac{A}{2k}=\frac{1}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}$$

Se nos pregunta el valor de t en el que x(t)=0, luego se tendrá que calcular

$$x\left(t\right)=-2kt+A=0 \quad \Leftrightarrow \qquad t=\frac{A}{2k}=\frac{1}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}\approx 11\,horas$$

b) Sea Δr el error en la medida de r. Sea ΔS el error en la medida del área de la superficie, correspondiente al error Δr.

Sabemos que,

$$\left|\Delta S\right|\leq\frac{1}{100}S=\frac{1}{100}4\pi r^2$$

La aproximación lineal de ΔS es $\Delta S\approx\frac{dS}{dr}\Delta r=8\pi r\Delta r$

Expresando la condición del enunciado se tiene,

$$\left|8\pi r\Delta r\right|\leq\frac{4\pi r^2}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\Delta r\right|\leq\frac{r}{200}=\frac{0,5}{100}r$$

Por lo tanto se deberá medir el radio con un error menor que el $0,5$ por ciento del valor verdadero.

REGLAS DE DERIVACIÓN

16 Calcular la derivada de las siguientes funciones, simplificando al máximo el resultado.

a) $y=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)))$ b) $y=\arccos x$ c) $y=a^{\frac{1-x}{1+x}}$

Solución

a) $y'=\cos\left(\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}x\right)\right)\cos\left(\operatorname{sen}x\right)\cos x$

b) Se cumple $y=\arccos x \Leftrightarrow x=\cos y$.

Derivando los dos miembros de la última igualdad respecto de x y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$1=-\operatorname{sen}y\cdot y'\Rightarrow y'=-\frac{1}{\operatorname{sen}y}$$

Como

$$\operatorname{sen}y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

se concluye finalmente

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) Se cumple $y = a^{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow \log y = \frac{1-x}{1+x}\log a$

Derivando respecto de x los dos miembros de esta última igualdad y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{2\log a}{(1+x)^2} \Leftrightarrow y' = -y\frac{2\log a}{(1+x)^2} \Leftrightarrow y' = -\frac{2\log a}{(1+x)^2}\, a^{\frac{1-x}{1+x}}$$

RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

17 En una empresa la fuerza laboral L se mide en horas-trabajador y es una función del tiempo, $L = f(t)$. Sea $M = g(t)$ la producción media por persona. Suponga que la producción Q está dada por el producto LM. En cierto momento la fuerza laboral L está creciendo a un ritmo de 4% anual y la producción media está creciendo a una razón de 5% al año. Encontrar la razón de cambio de la producción total cuando Q=10.

Solución

Datos del problema: $Q = LM = f(t)g(t)$

$$\frac{dL}{dt} = 0'04 \cdot L$$
$$\frac{dM}{dt} = 0'05 \cdot M$$

Se pide: $\frac{dQ}{dt} = \frac{dL}{dt}\cdot M + L\cdot\frac{dM}{dt}$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Q=10} = 0'04\cdot L\cdot M + L\cdot 0'05M = 0'09\cdot L\cdot M = 0'09\cdot Q = 0,9$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Q=10} = 0'04\cdot L\cdot M + L\cdot 0'05M = 0'09\cdot L\cdot M = 0'09\cdot Q = 0,9$$

18 ¿Con qué rapidez baja el nivel de agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 300 litros por minuto?

Solución

Se cumple que $V = \pi r^2 h$ siendo r el radio del cilindro, que es constante, y h su altura. Al vaciarse el volumen y la altura varían con el tiempo,

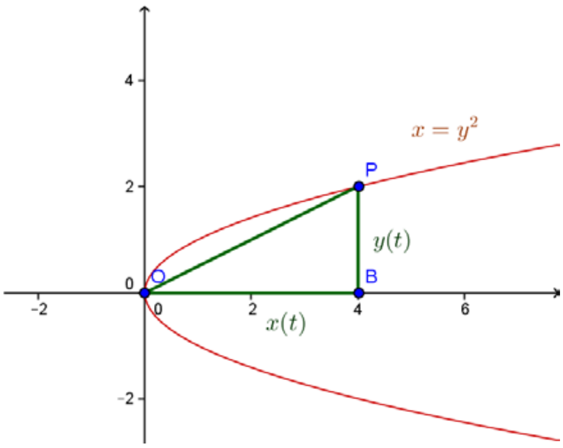
$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad \to \quad -300 = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad \to \quad \frac{dh}{dt} = \frac{-300}{\pi r^2} \frac{dm}{\text{minuto}}$$

Nota: $1litro = 1dm^3$

19 Un punto P se mueve sobre la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/seg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando x=9.

Solución

Se trata de un problema de razones de cambio relacionadas. La función distancia de un punto situado en las coordenadas (x, y) al origen es: $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$



Si el punto (x, y) está en la parábola $x = y^2$ será:

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

La velocidad a la que se aleja del origen aplicando la regla de la cadena es:

$$d'(t) = \frac{1}{2}\left(x^2(t) + x(t)\right)^{-1/2}\left(2x(t)\cdot x'(t) + x'(t)\right)$$

En el instante en que x=9 y teniendo en cuenta que $x'(t) = 5cm / seg$ se concluye que la velocidad a la que el punto P se aleja del origen es:

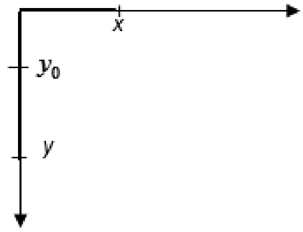
$$\frac{1}{2}\left(9^2 + 9\right)^{-1/2}\left(2\cdot 9\cdot 5 + 5\right) = \frac{95}{2\sqrt{90}} = \frac{95}{6\sqrt{10}}$$

20 Una persona conduce en dirección sur a 64 km/h y pasa por Madrid a las 12 del mediodía. Otra persona va hacia el este a 60 km/h, pasando por Madrid 15 minutos más tarde. ¿A qué velocidad se separan a las 14h?.

Solución

- Sea x, el espacio recorrido hacia el este por el coche que va en esta dirección, en el instante t.
- Sea y, el espacio recorrido hacia el sur por el coche que va en esta dirección, en el instante t.

- El instante $t = 0$ es a las 12:15h. Por tanto a las 14h es $t = 7/4$.
- $y_0 = 16km$, es el espacio recorrido por el coche que va hacia el sur en $t = 0$.



$$\begin{cases} x = 60t \\ y = 16 + 64t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 7/4$$

La distancia entre ambos vehículos en el instante t es: $s(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

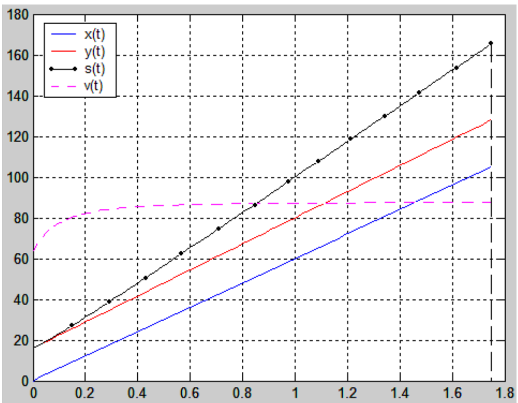
y la variación de esta distancia con el tiempo (velocidad de separación de los vehículos) se obtiene derivando con respecto de t:

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{(60t)60 + (16 + 64t)64}{\sqrt{(60t)^2 + (16 + 64t)^2}}$$

En la gráfica se han representado las curvas de las distancias de los dos móviles a Madrid en cada instante t a partir de las 12:15h, así como la distancia y la velocidad de separación entre ellos.

Los valores de estas funciones a las 14h ($t = 7/4$), son:

- Distancia recorrida por el coche que va hacia el este: $x(7/4) = 105km$
- Distancia recorrida por el coche que va hacia el sur: $y(7/4) = 128km$
- Distancia entre ambos vehículos: $s(7/4) = 165.56km$
- Velocidad de separación de ambos vehículos: $v(7/4) = 87.53km/h$



21 Un depósito de agua es cónico, con el vértice hacia arriba, y tiene 40 m. de alto y 20 m. de radio en la base. El depósito se llena a $80m^3/\min$. ¿A qué velocidad se eleva el nivel de agua cuando la profundidad del agua es de 12 m.?

Nota: El volumen de un cono de altura h y radio de la base r es: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

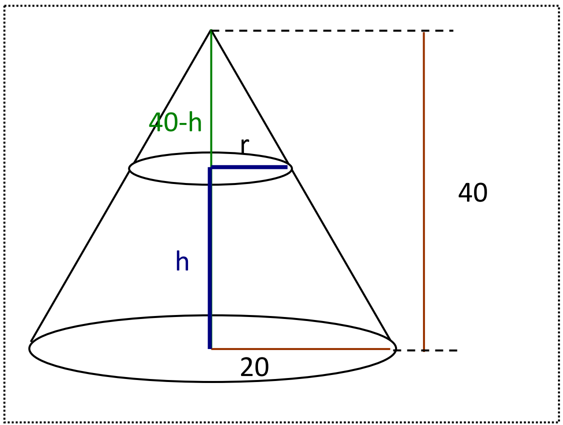
Solución

En cualquier instante de tiempo el volumen V es

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (40-h)$$

donde r y h son funciones del tiempo. Además estás dos funciones están relacionadas de la manera siguiente:

$$\frac{40}{40-h} = \frac{20}{r} \qquad r = \frac{40-h}{2}$$



En consecuencia el volumen en un instante t es:

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{[40-h(t)]^3}{4}$$

Derivando respecto de t en ambos lados de la igualdad

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{3 \cdot 4}\pi \cdot [40-h(t)]^2 \frac{dh}{dt}$$

En el instante en el que h=12 m el deposito se llena a $80\ m^3/\min$ luego,

$$80 = \frac{\pi}{4} \cdot [40-12]^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{49\pi} \approx 0'13 m/\min$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

22 Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $y^2 + 5x = xe^{x(y-2)}$ en el punto (-1,2)

Solución

El punto P(-1,2) es un punto de la curva: $2^2 + 5(-1) = (-1)e^{-(2-2)}$

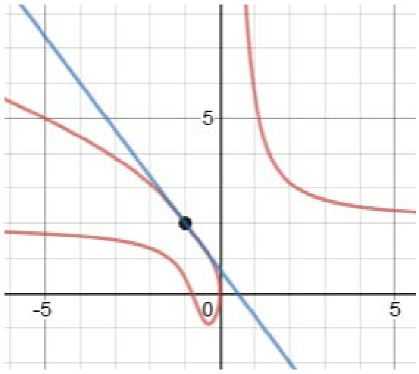
Suponiendo que esta ecuación define implícitamente a y como función de x, la pendiente de la recta tangente a la curva en P es la derivada en dicho punto. Derivando implícitamente:

$$2yy'+5=e^{x(y-2)}+xe^{x(y-2)}\left(y-2+xy'\right)$$

sustituyendo el punto P(-1,2) se calculara la pendiente de la recta pedida:

$$2\cdot 2y_P'+5=e^{-(2-2)}-e^{-(2-2)}\left(2-2+(-1)y'_P\right)$$

$$4y'_P+5=1+y'_P \quad \Rightarrow y'_P=-4/3$$



23 Dada la curva $x^2+y^2-2x+6y+6=0$, se pide representarla y calcular la recta tangente y normal a dicha curva en el punto P$\left(2,-3+\sqrt{3}\right)$.

Solución

Completando cuadrados

$$x^2+y^2-2x+6y+6=\boxed{x^2-2x}+\boxed{y^2+6y}+6=\boxed{(x-1)^2-1}+\boxed{(y+3)^2-9}+6$$

Se tiene que

$$x^2+y^2-2x+6y+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=4$$

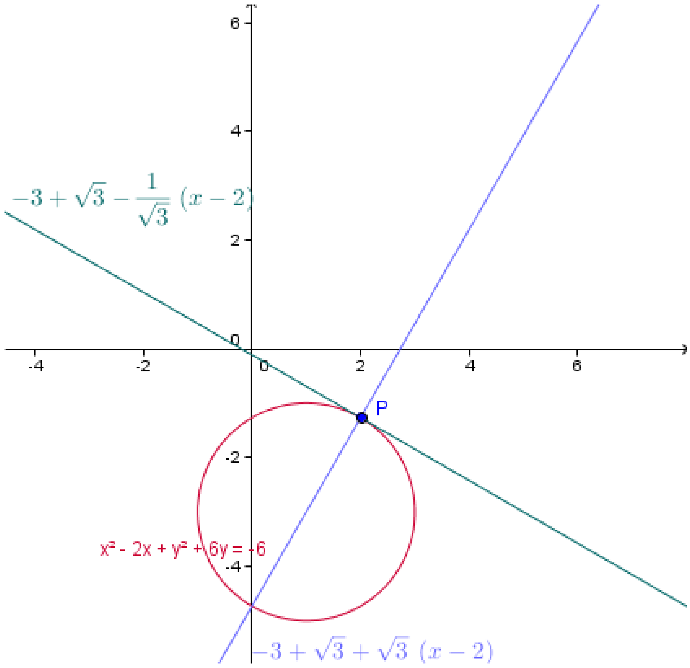
luego la curva es una circunferencia centrada en el punto (1, -3) y de radio 2. Para calcular la pendiente de la recta tangente calculamos la derivada en el punto P. Derivando implícitamente:

$$2x+2yy'-2+6y'=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{2x-2}{2y+6}$$

en el punto P $\qquad y'_P=-\dfrac{2\cdot 2-2}{2\left(-3+\sqrt{3}\right)+6}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

la ecuación de la recta tangente es: $\qquad y=\left(-3+\sqrt{3}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$

y la de la recta normal $\qquad y=\left(-3+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\,(x-2)$



24 Una fábrica vende q miles de artículos fabricados cuando su precio es de p euros/unidad. La relación entre p y q es $q^2 - 2q\sqrt{p} - p^2 - 31 = 0$.

Solución

Si el precio p del artículo es de 9 euros y se incrementa a una tasa de 0.20 euros por semana, se pide calcular la rapidez a la que cambia la cantidad de unidades q, vendidas por semana cuando el precio es de 9 euros.

Derivando respecto de t

$$2q\frac{dq}{dt} - 2\frac{dq}{dt}\sqrt{p} - \frac{q}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt} - 2p\frac{dp}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Cuando $p = 9$, el valor de q es

$$q^2 - 6q - 112 = 0 \Rightarrow q = \frac{6+\sqrt{36+448}}{2} = 14$$

Sutituyendo en (1) los valores $p = 9$, $q = 14$, $\frac{dp}{dt} = 0.2\frac{euros}{semana}$ se obtiene

$$\frac{dq}{dt} \simeq 0.206\frac{miles\ \ unidades}{semana}$$

25 Dos curvas se dicen que son ortogonales en un punto si sus rectas tangentes son perpendiculares. Determinar si las siguientes curvas son ortogonales en el punto $(1,1)$

$$y^2(2-x) = x^3 \qquad\qquad y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 1$$

Solución

Calculamos las pendientes de las rectas tangentes a ambas curvas derivando implícitamente:

Curva $C_1 \equiv y^2(2-x)=x^3$

$2yy'(2-x)-y^2=3x^2$. En el punto (1, 1)

$$2y'-1=3 \rightarrow y'=2$$

Luego la pendiente de la recta tangente a la curva C_1 en el punto (1,1) es $m_1=2$

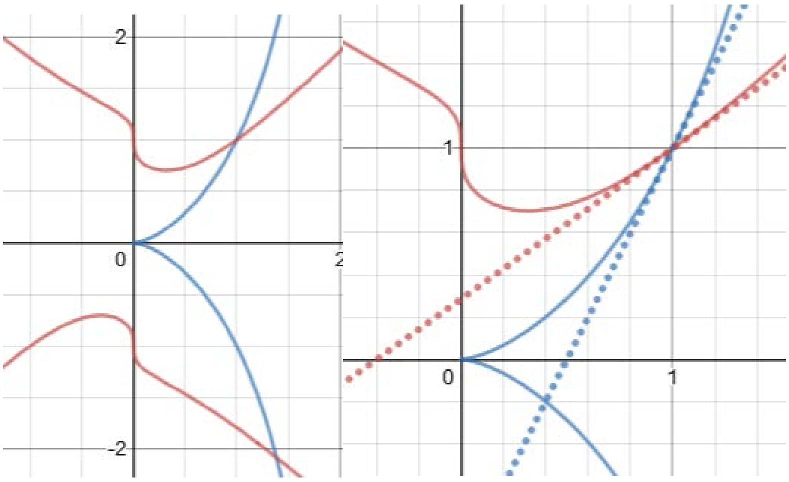
Curva $C_2 \equiv y^2+(xy)^{1/3}=x^2+1$

$2yy'+\frac{1}{3}(xy)^{-2/3}(y+xy')=2x$. En el punto (1, 1)

$$2y'+\frac{1}{3}(1+y')=2 \rightarrow \frac{7}{3}y'=2-\frac{1}{3} \rightarrow y'=\frac{5}{7}$$

Luego la pendiente de la recta tangente a la curva C_2 en el punto (1,1) es $m_2=\frac{5}{7}$

Como $m_1m_1 \neq -1$, las curvas no son ortogonales.



26

Calcula la recta tangente y la recta normal a la curva de ecuación

$$x^2+x^2sen(2y)+y^2(x+1)=9$$

en el punto $(3,0)$.

Solución

Derivando implícitamente

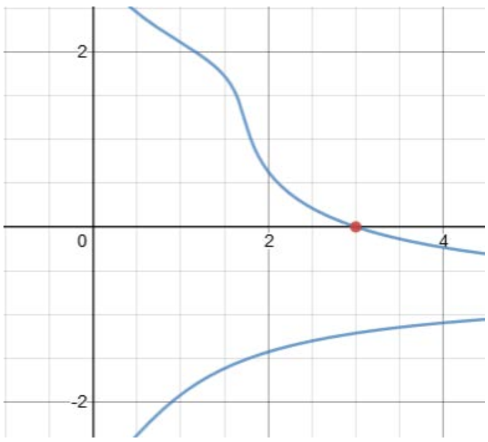
$$2x+2x\,sen(2y)+x^2\cos(2y)2y'+2yy'(x+1)+y^2=0$$

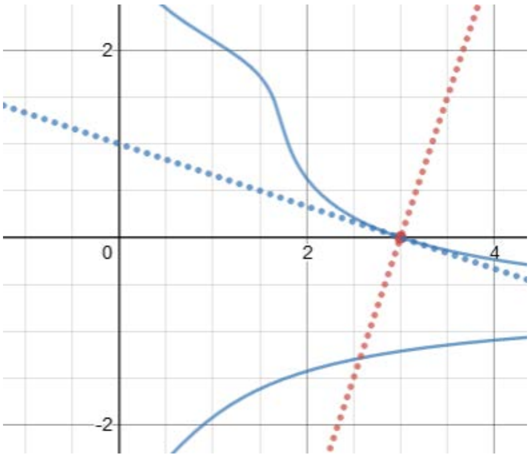
En el punto P$(3,0)$ se tiene

$$6+18y'=0 \quad \Rightarrow y'=\frac{-1}{3}$$

La recta tangente es: $y=\frac{-1}{3}\left(x-3\right)$

La recta normal es: $y=3\left(x-3\right)$





27 Halla el valor de a y b para que la recta tangente a la curva

$$ax^2y-be^{3x-3}=1+\operatorname{sen}\left(y^2-1\right)$$

en el punto P(1,1) sea la recta y=1.

Solución

Derivando implícitamente se tiene

$$2axy+ax^2y'-3be^{3x-3}=\cos\left(y^2-1\right)2yy'$$

Como la recta tangente en el punto P es y=1, su pendiente es 0, sustituyendo en la ecuación anterior x=1, y=1, y'=0 se tiene

$$2a-3b=0$$

Como además el punto P cumple la ecuación de la curva se tendrá

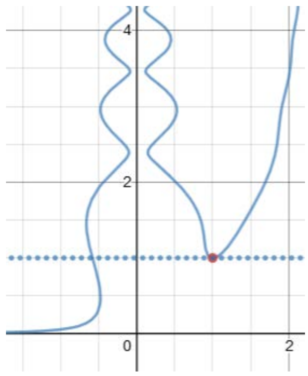
$$a-b=1$$

Resolviendo el sistema

$$2a-3b=0$$

$$a-b=1$$

la solución es $b=2$, $a=3$.



28 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ en el punto $(-2,2)$.

Solución

Si m es la derivada de y respecto de x de la función definida implícitamente por

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

entonces:

Recta tangente en $(-2,2)$: $\quad y - 2 = m(x+2)$

Recta normal en $(-2,2)$: $\quad y - 2 = -\dfrac{1}{m}(x+2)$

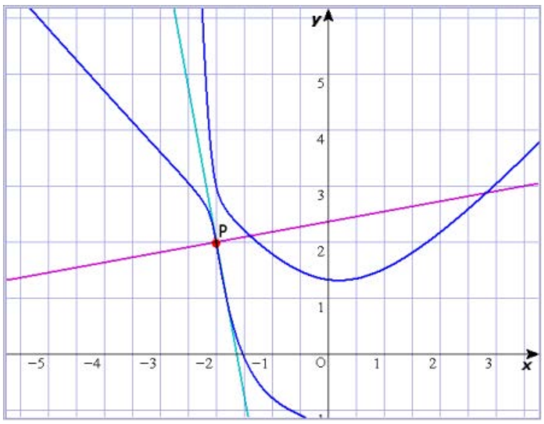
Para hallar m se deriva implícitamente la ecuación y se particulariza en $(-2,2)$

$$12x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 12x - 5y - 5xy' - 16yy' + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(-2,2) = -\frac{11}{2}$$

Por tanto,

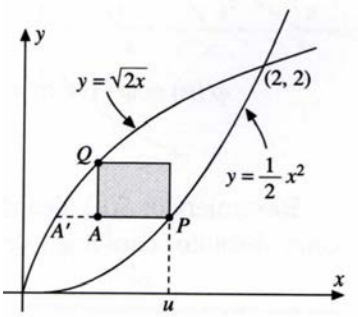
Recta tangente en $(-2,2)$: $\quad y - 2 = -\dfrac{11}{2}(x+2)$

Recta normal en $(-2,2)$: $\quad y - 2 = \dfrac{2}{11}(x+2)$



EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

29 Se consideran los rectángulos que están situados en la región del plano limitada por las curvas $y=\frac{x^2}{2}$ e $y=\sqrt{2x}$, que tienen un vértice en cada curva, que tienen sus lados paralelos a los ejes y sus lados horizontales miden $\frac{1}{2}$ (ver figura). Determinar de entre todos ellos, aquél que tiene área máxima.



Solución

Sean las coordenadas del punto P: $\left(a,\frac{1}{2}a^2\right)$.

Entonces las coordenadas del punto Q son $\left(a-\frac{1}{2},\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)}\right)$

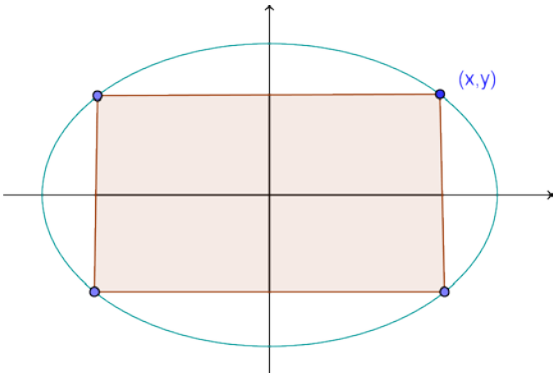
El área del rectángulo es: $A=\overline{AP}\;\overline{AQ}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{2}a^2\right)$

$$A'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2a-1}}-a\right)=0\;\Rightarrow\;a\sqrt{2a-1}=1$$

Resolviendo esta ecuación resulta $a=1$ luego P$\left(1,\frac{1}{2}\right)$ y Q $\left(\frac{1}{2},1\right)$. El rectángulo solución es entonces un cuadrado.

30 Calcula los lados del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Solución



Función a maximizar: $Area = 4xy$

Será máxima cuando:

$$\frac{d(Area)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(y + xy') = 0$$

Se calcula y' derivando implícitamente la ecuación de la elipse:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$ Sustituyendo en $y + xy' = 0$ se tiene:

$$\frac{a^2y^2 - x^2b^2}{a^2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2y^2 - x^2b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Y como x e y están sobre la elipse, verificarán $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, por tanto:

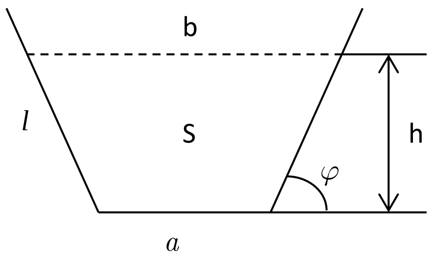
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \pm\frac{b\sqrt{2}}{2}$$

Por la naturaleza geométrica del problema se deduce que éstos valores sólo pueden corresponder a un máximo de la función *Área*. El valor del área máxima será

$$Area = 2ab$$

31 Se considera un canal, abierto por su parte superior, con sección en forma de trapecio isósceles. Por el canal circula agua; se conocen la altura h y el área S de la sección transversal de la corriente. Determinar el ángulo de inclinación φ que deben de tener las paredes laterales para que el perímetro mojado sea mínimo y hallar dicho perímetro.

Solución



Perímetro mojado:

$$P = a + 2l = a + 2\frac{h}{\operatorname{sen}\varphi}$$

El área S de la sección es,

$$S = \frac{1}{2}h(a+b) = \frac{1}{2}h\left[a + \left(a + 2h\operatorname{cotg}\varphi\right)\right] = h\left(a + h\operatorname{cotg}\varphi\right)$$

Despejando a,

$$a = \frac{S}{h} - h\operatorname{cotg}\varphi$$

Sustituyendo en el perímetro mojado,

$$P = \frac{S}{h} - h\operatorname{cotg}\varphi + 2\frac{h}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Para hallar el mínimo de esta función resolvemos $P'(\varphi) = 0$

$$P'(\varphi) = h\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} - 2h\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = h\frac{1-2\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{3}$$

En este punto hay un mínimo ya que $P'\left(\frac{\pi}{3} - \varepsilon\right) < 0$ y $P'\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon\right) > 0$

El valor del perímetro en este punto es: $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{S}{h} + \sqrt{3}\,h$

Material de consulta

Libro digital interactivo

https://personales.unican.es/alvareze/A_CalculoI/index_1.html

Cálculo de una variable. Tomo 1. Thomas, George B. Pearson Educacion.

- Capítulo 1. Preliminares
- Capítulo 3. Derivadas